SUCESIONES Y SERIES

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \right\}_{n \geq 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(p+k+1)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2k+p}$$

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

SUCESIONES
Y
SERIES INFINITAS

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERU

IMPRESO

02-09-97

RUC	Nº 19369978
Escritura Pública	Nº 4484
Registro Comercial	Nº 10716
Ley de Derecho del Autor	Nº 13714

PROLOGO

En la presente obra intitulada " Sucesiones y Series de Números Reales " en su 3era. Edición, se expone en forma concreta y precisa los fundamentos teóricos de las Sucesiones y Series. Se resuelven gran número de ejemplos y ejercicios como aplicaciones de los diversos teoremas y técnicas.

La selección de los ejemplos, ejercicios y problemas de cada capítulo, es consecuencia de la experiencia adquirida en la docencia universitaria y sugerencias brindadas por los colegas del área de matemáticas de las diversas universidades del país.

En el primer capítulo se estudia las Sucesiones, se establecen sus principales propiedades y se demuestran algunos criterios de convergencia no muy usuales.

En el segundo capítulo se desarrolla el concepto de Series. En la solución de algunos ejercicios se han utilizado las llamadas funciones especiales y se han calculado explícitamente algunas sumas de series principalmente utilizando las reglas TELESCÓPICAS .

Las series de potencia se desarrollan en el tercer capítulo, se calculan explícitamente el radio de convergencia y se estudia la diferencia e integración de las mismas, así como las series de Taylor.

La lectura del presente trabajo, requiere de un adecuado conocimiento de las propiedades de los Números Reales, del Cálculo Diferencial e Integral y de las Funciones especiales.

La presente obra es recomendable para todo estudiante de Ciencias Matemáticas, Física, Ingeniería, Economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos del análisis real.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Doctor Pedro Contreras Ch. por las observaciones y sugerencias brindadas.

Agradezco por anticipado la acogida que ustedes brindan a esta pequeña obra.

Eduardo Espinoza Ramos.

INDICE

CAPITULO I

1. SUCESIONES.

1.1	Definición	1
1.2	Definición	2
1.3	Definición	4
1.4	Propiedades de Limites de Sucesiones	5
1.5	Teorema de la Media Aritmética	8
1.6	Teorema de la Media Geométrica	10
1.7	Teorema	13
1.8	Teorema (Teorema del Encaje para Sucesiones)	13
1.9	Teorema (Criterio de la Razón por la convergencia de Sucesiones)	15
1.10	Sucesiones Divergentes.	17
1.11	Sucesiones Monótonas y Acotadas.	18
1.12	Teorema	20
1.13	Teorema	21
1.14	Sucesiones de Cauchy	22
1.15	Teorema.- (Formula de STIRLING)	23
1.16	Teorema.- (Criterio de Stolz-Cesaro)	24
1.17	Ejercicios Desarrollados	25
1.18	Ejercicios Propuestos	66

CAPITULO II

2. SERIES INFINITAS.

2.1	Definición	86
2.2	Definición	87
2.3	Propiedades	90
2.4	Teorema	92
2.5	Series Especiales	93
2.6	Series Infinitas de Términos Positivos	96
2.7	Teorema (Criterio de Comparación Directa)	97
2.8	Teorema (Criterio de Comparación por Limite)	99
2.9	Teorema (Criterio de la Razón o Criterio de D'ALEMBERT)	101
2.10	Teorema (Criterio de la Integral)	103

2.11	Teorema (Criterio de la Raíz o Criterio de Cauchy)	105
2.12	Series Infinitas de Términos positivos y negativos	107
2.13	Teorema (Criterio de Leibniz)	108
2.14	Teorema	109
2.15	Definición	110
2.16	Definición	110
2.17	Teorema (Criterio de la Razón para Series Alternantes)	111
2.18	Teorema (Criterio de RAABE)	114
2.19	Teorema	117
2.20	Ejercicios Desarrollados	118
2.21	Ejercicios Propuestos	150

CAPITULO III

3. SERIES DE POTENCIA.

3.1	Definición	177
3.2	Propiedades	177
3.3	Definición	178
3.4	Diferenciación de Series de Potencias	179
3.5	Integración de Series de Potencia	179
3.6	Serie de Taylor	180
3.7	Ejercicios Desarrollados	182
3.8	Ejercicios Propuestos	200

CAPITULO I

1. SUCESIONES

1.1 Definición.- Una sucesión es una función cuyo dominio es e conjunto de los números enteros positivos, cuyo rango es un conjunto arbitrario.

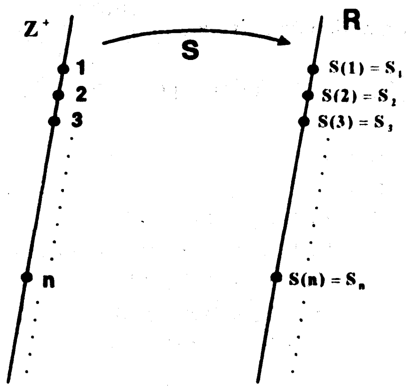
Trataremos solamente de sucesiones de números reales, es decir:

Consideremos una función $S : Z^+ \to R$, tal que, $\forall n \in Z^+$, $S(n) \in R$, es u elemento de la sucesión.

En vez de escribir $S(n)$ escribiremos S_n y llamaremos n-ésimo término de l sucesión.

Notación.- A una sucesión infinita $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ representaremos por $\{S_n\}_{n \geq 1}$

Gráficamente se tiene:



Ejemplos:

1. La sucesión 1, 4, 9, 16, ... , n^2, ... se escribe así $\{n^2\}_{n \geq 1}$

2. Los cinco primeros términos de la sucesión $\{\frac{(-1)^n}{n!}\}_{n \geq 1}$ son:

$$-1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ -\frac{1}{6} \ , \ \frac{1}{24} \ , \ -\frac{1}{120}$$

3. Hallar el término n-ésimo de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... ,
En efecto.

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 = 1 + 0 \\ S_2 &= 3 = 2 + 1 \\ S_3 &= 6 = 3 + 3 \\ S_4 &= 10 = 4 + 6 \\ S_5 &= 15 = 5 + 10 \\ S_6 &= 21 = 6 + 15 \\ &\vdots \\ S_n &= n + \frac{n-1}{2}.n \end{aligned}$$

De acuerdo a la regla de correspondencia de los primeros términos obtenemos que:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Luego la sucesión podemos escribir así: $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_{n\geq 1}$

4. Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ está definido por: $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$, hallar S_7.
En efecto:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 \\ S_3 &= S_2 + S_1 = 1 + 1 = 2 \\ S_4 &= S_3 + S_2 = 2 + 1 = 3 \quad \text{por definición de la sucesión} \\ S_5 &= S_4 + S_3 = 3 + 2 = 5 \\ S_6 &= S_5 + S_4 = 5 + 3 = 8 \\ S_7 &= S_6 + S_5 = 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

1.2 Definición.- Una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, se dice que tiene límite L, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $N > 0$, tal que:

$|S_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > N$ y denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$.

En forma simbólica, se tiene:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N > 0 / n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon}$$

Ejemplos.- Usando la definición de límite probar que:

1. Límite de $\{\frac{n+1}{n}\}_{n \geq 1}$, es 1, cuando n $\to \infty$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0 / \forall n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, pero necesitamos que $|S_n - L| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, de donde: $n > \frac{1}{\varepsilon}$, **luego basta tomar** $N > \frac{1}{\varepsilon}$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > \frac{1}{\varepsilon}\ / n > N, \text{entonces} \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right) = 1$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N = ?\ / n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|1 + (-1)^n \frac{1}{n} - 1\right| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Pero debe cumplirse que $|S_n - L| < \varepsilon$, **para ello hacemos** $\frac{1}{n} < \varepsilon$, de donde: $n > N > \frac{1}{\varepsilon}$. Luego $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N > \frac{1}{\varepsilon} \Big/ |S_n - L| < \varepsilon$.

3. $\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\ N = ?/ n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon$$

En efecto: $|S_n - L| = \left|2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right| = \left|\dfrac{1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}\right| \leq \left|1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|$.

Luego: $|S_n - L| \leq \left|1 - 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right| = 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \varepsilon + 1$, entonces,

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\log 2 < \log(\varepsilon + 1) \Rightarrow \sqrt{n} > \dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon + 1)}$, de donde: $n > \left(\dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon + 1)}\right)^2$, basta tomar $n > N > \left(\dfrac{\log 2}{\log(\varepsilon + 1)}\right)^2$.

1.3 Definición.- Se dice que una sucesión es convergente cuando tiene límite, en caso contrario la sucesión es divergente.

Ejemplos.- Determinar si es convergente ó divergente las sucesiones siguientes:

1. $\left\{\dfrac{n+1}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$

<u>Solución</u>

Para determinar la convergencia ó divergencia de una sucesión bastará calcular el límite de la sucesión, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\left\{\dfrac{n+1}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente.

2. $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}_{n\geq 1}$

<u>Solución</u>

Para determinar la convergencia ó divergencia de una sucesión bastará calcular el límite de la sucesión, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto: $\left\{\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}_{n\geq 1}$, es convergente.

3. $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2-n}\right\}_{n\geq 1}$

Solución

En forma similar a los ejemplos anteriores, calcularemos el límite de la sucesión, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto: $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2}\right\}_{n\geq 1}$, es convergente.

4. $\left\{\frac{3n^3+1}{2n^3+1}\right\}_{n\geq 1}$

Solución

En forma similar a los ejemplos anteriores, calcularemos el límite de la sucesión, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+1}{2n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{2}{3}$.

Por lo tanto: $\left\{\frac{3n^3+1}{2n^3+1}\right\}_{n\geq 1}$, es convergente.

1.4 Propiedades de Límites de Sucesiones

Consideremos dos sucesiones convergentes $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y $\{S'_n\}_{n\geq 1}$ y k, una constante, entonces:

i. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} k\ S_n = k \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm S'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$

iv. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n . S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n . \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$

v. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{S'_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}{\lim\limits_{n\to\infty} S'_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n \neq 0$

La demostración de estas propiedades es análoga, a la de los límites de funciones reales, por lo tanto se deja para el lector.

Observación.- Para hallar el límite de una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, se calcula el límite del término n-ésimo de la sucesión S_n cuando $n \to \infty$, es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = L}$$

Ejemplos.- Calcular los límites siguientes

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[(n+n^2)(1+\frac{1}{n+n^2})\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (n+n^2)^{\frac{1}{n}} . \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{Ln(n+n^2)^{\frac{1}{n}}} . \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n+n^2}\right)^{n+n^2}\right]^{\frac{1}{n(n+n^2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{Ln(n+n^2)}{n}} . e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+n^2)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1+2n}{n+n^2}} . e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+n^2)}}$$

$$= e^0 . e^0 = (1)(1) = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{\frac{1}{n}} = 1$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^3+2n-1}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}}$

Solución

Racionalizando el numerador y denominador.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^3+2n-1}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n(\sqrt{n^3+n^2+3n}+\sqrt{n^3+n^2-3n})}{6n(\sqrt{3n^3+2n-1}+\sqrt{3n^3-2n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{3-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1+1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1})\,\text{sen}^{3/2}(\frac{2}{n})$

Solución

Primeramente racionalizamos a la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1})\,\text{sen}^{3/2}(\frac{2}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\,\text{sen}^{3/2}(2/n)}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2/n)^{3/2}\left(\frac{\text{sen}(2/n)}{(2/n)}\right)^{3/2}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\text{sen}(2/n)}{(2/n)}\right)^{3/2} \frac{(2n)^{3/2}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \frac{2^{3/2}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2}$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} [3-2(\frac{na+1}{na})]^{\text{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} [3-2(\frac{na+1}{na})]^{\text{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})} = \lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{-2}{na})^{-\frac{na}{2}}\right]^{(-\frac{2}{na}\text{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na}))}$$

$$= e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na}\text{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})} = e^{4/\pi}, \text{donde:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\text{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na}) = \lim_{x\to 0} x\,\text{tg}\frac{\pi}{2}(1+x) = -\frac{2}{\pi}$$

1.5 Teorema de la Media Aritmética.-

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ convergente, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$$

Demostración

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a_n = a+\delta_n$, donde: $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, por lo tanto, a la suma expresamos así: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{a+\delta_1+a+\delta_2+\ldots+a+\delta_p+a+\delta_{p+1}+\ldots+a+\delta_n}{n}$

$$= \frac{na}{n} + \frac{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_p}{n} + \frac{\delta_{p+1}+\delta_{p+2}+\ldots+\delta_n}{n}$$

Como la suma $\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_p = k$ (constante) por ser una suma finita, como: $|\delta_i|_{i\leq p} < \varepsilon$, entonces:

$|\delta_{p+1} + \delta_{p+2} + ... + \delta_n| < |\delta_{p+1}| + |\delta_{p+2}| + ... + |\delta_n| < M\varepsilon$, por lo tanto su límite de, $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, es: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$

Ejemplos: Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{16n^2+3}}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}} + \sqrt{\dfrac{4}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{6}} + ... + \sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{16n^2+3}}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{6}} + ... + \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{16n^2+3}} . \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}} + \sqrt{\dfrac{4}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{6}} + ... + \sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}\right) = (\dfrac{1}{4})(1) = \dfrac{1}{4}$, de donde se tiene:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{16n^2+3}} = \dfrac{1}{4}$, además: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}} = 1$ y por el teorema de la media aritmética se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}} + \sqrt{\dfrac{4}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{6}} + ... + \sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}\right) = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-8n^3}}\left(9 + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{6} + ... + \dfrac{n+3}{n+4}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-8n^3}}\left(9 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + ... + \frac{n+3}{n+4}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[3]{1-8n^3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{1-8n^3}}\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{n+3}{n+4}\right)\frac{1}{n}$$

$$=0+\left(-\frac{1}{2}\right)(1)=-\frac{1}{2}$$

donde: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{\sqrt[3]{1-8n^3}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{1-8n^3}}=-\frac{1}{2}$ y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4}=1$ y por el teorema de la media aritmética se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{n+3}{n+4}\right)=1$

1.6 Teorema de la Media Geométrica.-

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n>1}$ convergente, si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}=a$

Demostración

Como $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Rightarrow Ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)=Ln\,(a)$, de donde: $\lim\limits_{n\to\infty}(Ln(a_n))=Ln(a)$, sea $u_n=\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \Rightarrow Ln\,u_n=Ln\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}$, $=\frac{1}{n}\left(Ln\,a_1+Ln\,a_2+\ldots+Ln\,a_n\right)$.

Tomando límite cuando n→∞ y aplicando el teorema de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty}Ln\,(u_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(Ln\,a_1+Ln\,a_2+\ldots+Ln\,a_n\right)$$

$$Ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,a_1+Ln\,a_2+\ldots+Ln\,a_n}{n}=Ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}\right)=Ln\,a,$$

levantando el logaritmo en ambos miembros: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}=a$

Ejemplos.- Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{11}\cdots\frac{2n+1}{3n+2}}$

Solución

Se observa que: $a_1=\frac{3}{5},\ a_2=\frac{5}{8},\ a_3=\frac{7}{11},\ldots,a_n=\frac{2n+1}{3n+2}$, de donde:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}$, luego por el teorema de la media geométrica se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{11}\cdots\frac{2n+1}{3n+2}}=\frac{2}{3}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{Ln(3)}{Ln(5)}\cdot\frac{Ln6}{Ln10}\cdots\frac{Ln(3n)}{Ln(5n)}}$

Solución

Se observa que: $a_1=\frac{Ln3}{Ln5},\ a_2=\frac{Ln6}{Ln10},\ldots,\ a_n=\frac{Ln(3n)}{Ln(5n)}$, de donde:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Ln(3n)}{Ln(5n)}=1$, luego por el teorema de la media geométrica se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{Ln(3)}{Ln(5)}\cdot\frac{Ln(6)}{Ln(10)}\cdots\frac{Ln(3n)}{Ln(5n)}}=1$$

Observación.- Existen límites que se calculan mediante la integral definida. (veamos el caso particular).

Para la integral definida sobre el intervalo [0,1], de donde: $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, $c_i=a+i\Delta x=0+\frac{i}{n}=\frac{i}{n}\ \Rightarrow\ c_1=\frac{i}{n}$.

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).\frac{1}{n}}$$

Ejemplos.- Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$

Solución

Al límite dado lo expresaremos en una integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(e^{1/n}+e^{2/n}+\ldots+e^{n/n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = \int_0^1 e^x\,dx = e^x \Big/_0^1 = e-1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = e-1$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{n}{i^2+n^2}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{i}{n})^2+1}.\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big/_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}((\frac{1}{n})^6+(\frac{2}{n})^6+\ldots+(\frac{n}{n})^6)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^6 = \int_0^1 x^6\,dx = \frac{x^7}{7} \Big/_0^1 = \frac{1}{7} - 0 = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^7} = \frac{1}{7}$$

1.7 Teorema.- Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, si $0 < r < 1$ y si $r > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty$.

Demostración

De acuerdo a la definición **1.2** se tiene: $\forall\ \varepsilon > 0$, buscaremos un número $N > 0$, de tal manera que: $|r^n - 0| < \varepsilon$, $\forall\ n > N$.

Luego: $|r^n - 0| = r^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \text{ Ln}r < \text{Ln}\varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{\text{Ln}\varepsilon}{\text{Ln}r} = N$, puesto que, $0 < r < 1$, por lo tanto: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N = \dfrac{\text{Ln}\varepsilon}{\text{Ln}r}$, tal que: $|r^n - 0| < \varepsilon$, $\forall\ n > N = \dfrac{\text{Ln}\varepsilon}{\text{Ln}r}$, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ puesto que $r = \dfrac{2}{3} < 1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ puesto que $r = \dfrac{4}{3} > 1$

1.8 Teorema - (Teorema del Encaje para Sucesiones).-

Si $\forall\ n \in Z^+$, $\exists\ N > 0$, tal que: $a_n \le c_n \le b_n$, $\forall\ n > N$ y si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} = b_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Demostración

Por hipótesis tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_1 > 0 \,/\, n > N_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$, es decir: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ **... (1)**

$\lim_{n\to\infty} b_n = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_2>0 \,/\, n > N_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$, es decir: $L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon$ ... **(2)**

Sea $N = \text{máx}\,\{N_1 , N_2\}$, entonces tenemos:

$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$, de **(1)**, **(2)** e hipótesis.

Luego tenemos $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N = \text{máx}\,\{N_1 , N_2\}$, tal que: $n > N \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$, de donde : $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, por definición **1.2**.

Ejemplo.- Probar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$

Solución

$\forall\, n \in Z^+$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, como $n \in Z^+ \Rightarrow \dfrac{1}{n} > 0$, entonces: $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$, y como $\lim_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Luego por el teorema **1.8**, se tiene: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$

Ejemplo.- Demostrar que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$, $0 < a < b$

Solución

Como $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$, $\Rightarrow b^n < a^n + b^n < 2b^n$, $\Rightarrow b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2}b$, como $\lim_{n\to\infty} b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}b = b$, entonces por el teorema **1.8** se tiene: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

1.9 Teorema.- (Criterio de la Razón para la Convergencia de Sucesiones).-

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.

Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right| < 1$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ y por lo tanto: la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Demostración

Por hipótesis se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right| < 1$, sea r un número real, tal que:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right| < r < 1 \Rightarrow \exists\ N > 0 \,/\, \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right| < r$, siempre que n > N.

Sea $p \in Z^+ / p > N \Rightarrow \left|\dfrac{S_{p+1}}{S_p}\right| < r \Rightarrow \left|S_{p+1}\right| < r\left|S_p\right|$, de donde:

$\left|S_{p+2}\right| < r\left|S_{p+1}\right| < r^2\left|S_p\right|$, en general se tiene:

$\left|S_{p+k}\right| < r^k\left|S_p\right|$, de donde: $-r^k\left|S_p\right| < S_{p+k} < r^k\left|S_p\right|$, como 0< r < 1 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$ (teorema **1.7**)

Luego $\lim\limits_{k\to\infty} -r^k\left|S_p\right| = \lim\limits_{k\to\infty} r^k\left|S_p\right| = 0$ y por el (teorema **1.8**) se tiene: $\lim\limits_{k\to\infty} S_{p+k} = 0$, por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

Ejemplos.- Demostrar que:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{n!} = 0$

Solución

Sea $\quad S_n=\frac{5^n}{n!}\Rightarrow S_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$, entonces por el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!5^{n+1}}{(n+1)!5^n}\right| \;=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0\;<\;1$$

Luego por el teorema **(1.9)** se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

Solución

Sea $S_n=\frac{n}{3^n}\Rightarrow S_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^n}{n.3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$$

Luego por el teorema **(1.9)** se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$.

. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

Solución

Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes.

Sea $\quad S_n=\frac{n!}{n^n}\Rightarrow S_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto por el teorema 1.9 se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

1.10 Sucesiones Divergentes.-

Se ha dicho que una sucesión es divergente cuando no tiene límite, esto puede ser, divergente a $+\infty$; a $-\infty$ ú oscilante.

a. Definición.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, diremos que: $S_n \to +\infty$, cuando $n \to \infty$, si para todo $M > 0$, existe $N > 0$, tal que: $S_n > M$, $\forall\ n > N$.

Ejemplo.- Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n-1} = +\infty$

Solución

$\forall\ M > 0, \exists\ N = ?$ (que depende de M), tal que: $3^{2n-1} > M \Rightarrow (2n-1)\, L_n 3 > L_n M$,

es decir: $n > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L_n M}{L_n 3} + 1\right) = N$.

b. Definición.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, diremos que: $S_n \to -\infty$, cuando $n \to \infty$, si para todo $M > 0$, existe $N > 0$, tal que: $S_n < -M$, $\forall\ n > N$.

Ejemplo.- Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - 2n = -\infty$

Solución

$\forall\ M > 0, \exists\ N = ? \,/\, 1 - 2n < -M \Rightarrow n > \dfrac{1+M}{2} = N$

Luego $\forall\ M > 0, \exists\ N = \dfrac{1+M}{2} \,/\, 1 - 2n < -M,\ \forall\ n > N$.

c. Definición.- Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ diverge, pero no a $-\infty$, ni a $+\infty$, y además toma valores positivos y negativos en forma alternada, diremos que la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es oscilante.

Ejemplo.- La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$, es oscilante, pues la sucesión es -1, 1, -1,..., si n es par $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ y cuando n es impar $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = -1$. Luego $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$, por lo tanto, no es convergente; pero tampoco diverge a $+\infty$, ni a $-\infty$, por lo tanto, es oscilante por definición **c)**.

1.11 Sucesiones Monótonas y Acotadas.-

a. Definición.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión, entonces:

i. Si $S_n \leq S_{n+1}$, $\forall\, n > N \Rightarrow$ la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

ii. Si $S_{n+1} \leq S_n$, $\forall\, n > N \Rightarrow$ la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente.

A una sucesión que sea creciente o decreciente le llamaremos monótona.

Observación.-

Si $S_n < S_{n+1} \Rightarrow$ diremos que la sucesión es estrictamente creciente.

Si $S_{n+1} < S_n \Rightarrow$ diremos que la sucesión es estrictamente decreciente.

Ejemplos.-

1. Determinar si la sucesión $\{\frac{n}{2n+1}\}_{n\geq 1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

<u>solución</u>

Escribiremos los elementos de la sucesión $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \dots,$

Se observa que los cuatro primeros elementos de la sucesión van creciendo cuando n crece.

En general tenemos: $\dfrac{n}{2n+1} \le \dfrac{n+1}{2n+3}$ ... **(1)**

La desigualdad **(1)** se verifica si encontramos otra desigualdad equivalente en la cual podemos afirmar que es válida.
Así por ejemplo en la desigualdad **(1)** podemos escribir:

$$2n^2 + 3n \le 2n^2 + 3n + 1 \quad \text{... } \mathbf{(2)}$$

La desigualdad **(2)** es válida porque el miembro de la derecha es igual al de la izquierda más uno, por lo tanto la desigualdad **(1)** es válida.
Es decir: $S_n \le S_{n+1}$, luego la sucesión es creciente.

2. Determinar si la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\ge1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución

Escribiremos los elementos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\ge1}$, $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$

Se observa que los cuatro primeros elementos de la sucesión van decreciendo cuando n crece.

En general tenemos : $\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{n}$ ... **(1)**

La desigualdad **(1)** escribiremos en otra desigualdad equivalente para ver su validez.

$n \le n + 1$ ... **(2)**

La desigualdad **(2)** es válida porque el miembro de la derecha es igualdad al miembro de la izquierda más uno, por lo tanto la desigualdad **(1)** es valida.

Luego $S_{n+1} \le S_n$, entonces la sucesión es decreciente.

b. Definición.- Al número A le llamaremos cota inferior de la sucesión $\{S_n\}_{n\ge1}$ si $A \le S_n$, $\forall\, n \in Z^+$, y al número B le llamaremos cota superior, si $S_n \le B, \forall n \in Z^+$.

Ejemplos:

1. En la sucesión $\{\frac{n}{2n+1}\}_{n\geq 1}$, una cota inferior es el cero, cuyos elementos son: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$, otra cota inferior es $\frac{1}{3}$, en general una cota inferior es menor ó igual que $\frac{1}{3}$.

2. En la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$, el 1 es una cota superior, en general cualquier número mayor o igual que 1 es cota superior.

c. **Definición.-** Si A es cota inferior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y $A \geq C$ para toda cota inferior C de $\{S_n\}_{n\geq 1}$; entonces A se llama la máxima cota inferior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$.

Si B es cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y si $B \leq D$ para toda cota superior D de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, entonces: B se llama la mínima cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$.

d. **Definición.-** La sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ diremos que está acotada, si y sólo si, tiene cota superior e inferior. Es decir: $|S_n| \leq k, \ \forall \ n \in Z^+$

Ejemplo.- La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es acotada.

1.12 Teorema.- Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, entonces:

i. Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

ii. Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Demostración

i. $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es acotada superiormente, por hipótesis α = mínima cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, dado un número $\varepsilon > 0$, se tiene que $\alpha - \varepsilon$, no es cota superior de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, pues $\alpha - \varepsilon < \alpha$ y α es la mínima cota superior de la sucesión como $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior, $\exists$ un número entero positivo $N > 0$, tal que: $\alpha - \varepsilon < S_n$, $\forall\, n > N$ **... (1)**

Tenemos $S_n < \alpha$, $\forall\, n \in Z^+$ **... (2),** α es la mínima cota superior.
Si $S_n \leq S_{n+1}$, $\forall\, n > N$ **... (3),** ($\{S_n\}_{n\geq 1}$ es creciente por hipótesis).
Luego $S_n \leq S_n$ pero $n > N$ **.... (4),**

De **(1), (2), (3)** y **(4)**, se tiene que: $\alpha - \varepsilon < S_n \leq S_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$ siempre que $n > N \Rightarrow \{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y su límite es la mínima cota superior.

ii. La demostración es similar que **(i)**.

Observación.- El teorema establece que toda sucesión monótona y acotada es convergente.

1.13 Teorema.- Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración

Para demostrar que: $|S_n| \leq k$, $\forall$ n

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión convergente y sea L su límite, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ ,\exists\, N > 0 / n > N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon,$$

tenemos: $|S_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n > N$

$S_n = S_n - L + L \Rightarrow |S_n| \leq |S_n - L| + |L| < \varepsilon + |L|$ de donde: $|S_n| < \varepsilon + |L|$, $\forall\, n > N$.

$S_1, S_2, \ldots, S_N, S_{N+1} \ldots$ acotada por $\varepsilon + |L|$.

Sea $k = max\{|S_1|, |S_2|, |S_3|, \ldots, |S_n|, \varepsilon + |L|\}$, luego se tiene: $|S_n| \leq k$, $\forall$ n.

1.14 Sucesión de Cauchy.-

a. **Definición.-** Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión, se dice que es una sucesión de cauchy, si para todo $\varepsilon > 0, \exists$ N > 0 / m > N, n > N entonces $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Ejemplos.-

1. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

   En efecto: $\forall \in > 0, \exists N = ? \ / \ \forall m > N, n > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

i. Si m = n $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = 0 < \varepsilon, \ \forall$ n.

ii. Si m > n $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ pero debe cumplir que:

$|S_m - S_n| < \varepsilon \ \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ de donde: $n > \frac{1}{\varepsilon} = N$, (m > n > N). Luego bastará tomar $N = \frac{1}{2}$.

iii. Si n > m $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ como $|S_m - S_n| < \varepsilon$, entonces:

$\frac{1}{m} < \varepsilon \ \Rightarrow m > \frac{1}{\varepsilon} = N$. Luego bastará tomar $N = \frac{1}{\varepsilon}$(n >m>N).

2. La sucesión $\{\frac{n+1}{n}\}_{n\geq 1}$, es de cauchy.

   En efecto: $\forall$ ε > 0, $\exists$ N = ? / n, m > N $\Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

   $|S_m - S_n| = \left|\frac{m+1}{m} - \frac{n+1}{n}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, se reduce al ejemplo anterior, luego bastará tomar $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

1.15 Teorema.- (Fórmula de STIRLING)

Demostrar que para n grande: $n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$ aproximadamente.

Demostración

Por definición de la función GAMA, se tiene:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{nLnx-x} dx \qquad \textbf{... (1)}$$

La función n L_n x - x, tiene un máximo relativo para x = n (queda como ejercicio probar).

Haciendo la sustitución x = n + y en la ecuación **(1)**:

$$\Gamma(n+1) = e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{nLn(n+y)-y} dy = e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{nLnn+nL_n(1+\frac{y}{n})-y} dy$$

$$= e^{-n} n^n \int_{-n}^{\infty} e^{nLn(1+\frac{y}{n})-y} dy \qquad \textbf{... (2).}$$

También se conoce que: $Ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots$, **... (3).**

Haciendo $x = \dfrac{y}{n}$, además $y = \sqrt{n}\; v$, se tiene:

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots\cdots} dy = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{v^2}{3\sqrt{n}}\cdots} dv \qquad \textbf{... (4).}$$

Para n grande, una buena aproximación es:

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{e^{-\frac{v^2}{2}}dv} = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} \qquad \textbf{... (5).}$$

Además $\qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad$ **... (6)**

Por lo tanto de **(6)** en **(5)** se tiene: $n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$.

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\, e^{-1}\, {}^{2n}\!\sqrt{2\pi n}}{n} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} {}^{2n}\!\sqrt{2\pi n}$$

$$= \frac{1}{e} e^{\lim\limits_{n\to\infty} Ln\,{}^{2n}\!\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{e} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Ln 2\pi n}{2n}} = \frac{1}{e} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{e} e^{0} = \frac{1}{e}$$

1.16 Teorema.- (Criterio de Stolz-Cesaro).-

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$, dos sucesiones tal que:

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, es monótona ó.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, y la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, es monótona, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda$$

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L_n(n!)}{L_n(n^n)}$

Solución

$$\text{Sea } \begin{cases} a_n = Ln(n!) \\ b_n = Ln(n^n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = Ln(n+1)! \\ b_{n+1} = Ln(n+1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n+1)! - Ln\,n!}{Ln(n+1)^{n+1} - Ln\,n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)}{(n+1)Ln(n+1) - nLn.n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n+1)}{n.Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + Ln(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(1+n)^{1/n}}{Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+Ln(1+n)^{1/n}} = \frac{Ln.e}{Ln1+Ln.e} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n!)}{Ln(n^n)} = 1$$

1.17 Ejercicios Desarrollados.-

1. Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $S_n = \frac{(2n+5)^{2n+5} n^{n-3}}{(4n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}}$

Solución

$$S_n = \frac{(2n+5)^{2n+5} n^{n-3}}{(4n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}} = \frac{(2n)^{2n+5}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+5} n^{n-3}}{(4n)^{n+2}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n+2} n^{2n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{2^{2n+5} n^{2n+5} n^{n-3} n^{-2n}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+5}}{4^{n+2} n^{n+2}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n+2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n+5} n^{2+n}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+5}}{2^{2n+4} n^{n+2}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n+2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{2\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+5}}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n+2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left[\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{\frac{2n}{5}}\right]^{\frac{5(2n+5)}{2n}}}{\left[1+\frac{1}{4n}\right]^{4n\left(\frac{n+2}{4n}\right)}\left[1+\frac{3}{n}\right]^{\frac{n}{3}\left(\frac{6n}{n}\right)}} = \frac{2e^5}{e^{1/4}e^6} = 2e^{-5/4}.$$

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}(\frac{n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5n\pi}{n+1})$

Solución

$$\text{sen}(\frac{n\pi}{n+1}) = \text{sen}(\pi - \frac{\pi}{n+1}) = \text{sen}(\frac{\pi}{n+1})$$

$$\text{sen}(\frac{3n\pi}{n+1}) = \text{sen}(3\pi - \frac{3\pi}{n+1}) = \text{sen}(\frac{3\pi}{n+1})$$

$$\text{sen}(\frac{5n\pi}{n+1}) = \text{sen}(5\pi - \frac{5\pi}{n+1}) = \text{sen}(\frac{5\pi}{n+1})$$, de donde:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}(\frac{n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3n\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5\pi n}{n+1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^6+1}\,\text{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3}(n+1)^3\,\text{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3}.\lim_{n\to\infty}(n+1)^3\,\text{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) \qquad \textbf{... (1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+1}}{(n+1)^3} = \sqrt{2} \qquad \textbf{... (2)}$$

Sea $z = \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 = \frac{1}{z}$; cuando $n \to \infty$, $z \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^3\,\text{sen}(\frac{\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{3\pi}{n+1}).\text{sen}(\frac{5\pi}{n+1}) = \lim_{z\to 0} z^{-3}\,\text{sen}\,\pi z.\text{sen}\,3\pi z.\text{sen}\,5\pi z$$

$$= \lim_{Z \to \infty} \pi \frac{\operatorname{sen} \pi Z}{\pi Z} .3\pi \frac{\operatorname{sen} 3\pi Z}{3\pi Z} .5\pi \frac{\operatorname{sen} 5\pi Z}{5\pi} = 15\pi^{3} \qquad \ldots \textbf{(3)}$$

Ahora reemplazamos **(2)**, **(3)**, en **(1)**

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \sqrt{2n^{6}+1}\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{5n\pi}{n+1}\right) = 15\sqrt{2}\pi^{3}$$

3. Calcular $\lim\limits_{n \to \infty} n^{6}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{n^{2}+3}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n}+3}}\right]^{3n}$

<u>Solución</u>

$$\lim_{n \to \infty} n^{6}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{n^{2}+3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^{n}+3}}\right]^{3n} = \lim_{n \to \infty} n^{6}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{n^{2}+3}}\left(1 - \frac{\sqrt[n]{n^{2}+3}}{\sqrt[n]{n^{n}+3}}\right)\right]^{3n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^{6}}{(n^{2}+3)^{3}}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{n^{n}+3}}\right)^{3n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{2}}{n^{2}+3}\right)^{3}\left[\left(1 - \sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{n^{n}+3}}\right)^{\sqrt[n]{\frac{n^{n}+3}{n^{2}+3}}}\right]^{3n\sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{n^{n}+3}}}$$

$$= (1)^{3} e^{-3\lim\limits_{n \to \infty} n\sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{n^{n}+3}}} = e^{3}, \quad \textbf{donde:} \quad \lim_{n \to \infty} n\sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{n^{n}+3}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n+2}+3n^{n}}{n^{n}+3}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n}(n^{2}+3)}{n^{n}(1+3n^{-n})}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2}+3}{1+3n^{-n}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} Ln\left(\frac{n^{2}+3}{1+3n^{-n}}\right)} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{Ln(n^{2}+3) - Ln(1+3n^{-n})}{n}} = e^{0} = 1$$

Aplicando la regla de L'Hospital

4. Evaluar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$

Solución

Racionalizando numerador y denominador

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{1\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n^2}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{3}{2}\left(\frac{0+0+0}{\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{1+0}+1}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{0}{1+1+1}\right)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=0$$

5. Calcular el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1)$, $a>0$

Solución

Hacemos $Z=\sqrt[n]{a}-1\Rightarrow\sqrt[n]{a}=Z+1\Rightarrow\frac{1}{n}Ln.a=Ln(1+z)$ de donde $\frac{1}{n}=\frac{Ln(1+z)}{Lna}\Rightarrow n=\frac{Lna}{Ln(1+z)}$, cuando $n\to\infty\Leftrightarrow z\to 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{1/n}-1\right)=\lim_{z\to 0}\frac{Lna}{Ln(1+z)}z=Lna.\lim_{z\to 0}\frac{1}{Ln(1+z)^{1/z}}=Lna.\frac{1}{Lne}=Lna.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(a^{1/n}-1\right)=\ln a$$

6. Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ donde:

$$T_n=\frac{(3n+1)^{1/2}(n+7)^{n+1/2}}{\left(3n+(n^2+5)^{1/2}\right)(n+3)^n}$$

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de la sucesión calcularemos el límite de T_n, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^{1/2}(n+7)^{n+1/2}}{\left(3n+(n^2+5)^{1/2}\right)(n+3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^n\sqrt{3n+1}\sqrt{n+7}}{(n+3)^n\left(3n+\sqrt{n^2+5}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+3}\right)^n \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}\sqrt{n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{4}}\right)^{\frac{4n}{n+3}}.\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}\sqrt{1+\frac{7}{n}}}{3+\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+3}}\frac{\sqrt{3+0}\sqrt{1+0}}{3+\sqrt{1+0}}=e^4\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=\dfrac{\sqrt{3}}{4}e^4$, **por lo tanto la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.**

7. Calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3-4n}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2+4n}{3-4n}}\right]^{\frac{(3-4n)}{n^2+4n}\frac{n^2-1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-4n}{n^2+4n}\cdot\frac{n^2-1}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4n^3+3n^2+4n-3}{n^3+4n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}} = \frac{e^{-1+0}}{1+0} = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \frac{1}{e}$$

8. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n} + x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n$

Solución

Sea $z = \frac{a}{n}$ de donde: $n = \frac{a}{z}$, Cuando $n \to \infty \Leftrightarrow z \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n} + x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{z\to\infty} (\cos z + x\operatorname{sen} z)^{a/z} = \lim_{z\to\infty} [1 + (\cos z - 1 + x\operatorname{sen} z)]^{a/z}$$

$$= \lim_{z\to 0} [(1 + (\cos z - 1 + x\operatorname{sen} z))^{\frac{1}{\cos z - 1 + x\operatorname{sen} z}}]^{\frac{a(\cos z - 1 + x\operatorname{sen} z)}{z}}$$

$$= e^{a.\lim\limits_{z\to 0} \frac{\cos z - 1 + x\operatorname{sen} z}{z}} = e^{a.\lim\limits_{z\to 0}\left(-\frac{1-\cos z}{z} + x\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)} = e^{a(-0+x)} = e^{ax}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n} + x\operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n = e^{ax}$$

9. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{1/n}$

Solución

Aplicando la propiedad $e^{Lna} = a$

$$\lim_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+n+n^2)^{1/n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n+n^2)}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2n}{1+n+n^2}} = e^0 = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = 1$$

10. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\left(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+\dots+\cos^{n-1}\frac{1}{n}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2n}.\cos\frac{1}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2n}\left(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+\dots+\cos^{n-1}\frac{1}{n}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2n}.\cos\frac{1}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{2n}\frac{\left(1+\cos\frac{1}{n}+\cos^2\frac{1}{n}+\dots+\cos^{n-1}\frac{1}{n}\right)}{\cos\frac{1}{2n}}=0\frac{(1+1+1+\dots+1)}{1}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos^n\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=0$$

11. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+9n^2}}\left(\dfrac{5n^2}{4+n}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{7}+\dots+\dfrac{2n}{3n+1}\right)$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el teorema de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+9n^2}}\left(\frac{5n^2}{4+n}+\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\dots+\frac{2n}{3n+1}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{\sqrt{1+9n^2}\,(4+n)} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+9n^2}}\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}\left(\frac{4}{n}+1\right)} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} \frac{\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}\right)}{n}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9+0}(0+1)} + \frac{1}{\sqrt{9+0}}.\frac{2}{3} = \frac{5}{3}+\frac{2}{9} = \frac{17}{9}, \text{ donde: } \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

12. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)}\right)^n\left(\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}\ldots\frac{5n-2}{3n-1}\right)}$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el teorema de la media geométrica.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)}\right)^n\left(\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}\ldots\frac{5n-2}{3n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)}.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}\ldots\frac{5n-2}{3n-1}}$$

$$= (1).(1).\frac{5}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{donde : } = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n)}{\ln(10n)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}.\frac{8}{5}.\frac{13}{8}\ldots\frac{5n-2}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{3n-1} = \frac{5}{3}$$

13. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$

Solución

Sea $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

en el cálculo de este límite aplicamos el teorema de la media aritmética.

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right).\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) \qquad ...(1)$$

Ahora calculamos cada uno de los límites.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) = 1$$ (por el teorema de la media aritmética).

Sea $Z=\frac{2}{n} \Rightarrow n=\frac{2}{Z}$, cuando $n\to\infty \Rightarrow z\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{Z\to 0}\frac{2}{Z}\text{sen}\left(2\pi\cos Z\right) = 2\lim_{z\to 0}\frac{-2\pi\cos(2\pi\cos Z)\,\text{sen}\,Z}{1}$$

$$= -4\pi\cos(2\pi).\,0 = 0$$

Luego estos límites reemplazamos en **(1)** se tiene.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\text{sen}\left(2\pi\cos\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right) = (0)(1) = 0$$

14. Calcular $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-1/2}$

Solución

En el presente ejercicio aplicaremos el criterio de la suma de Riemann es decir:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).\frac{1}{n}$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-1/2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)/_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$

15. Hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4n})+\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{4n})+...+\operatorname{tg}(\frac{n\pi}{4n})\right)$

Solución

Aplicando la suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{4n}+...+\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tg}(\frac{i\pi}{4n}).\frac{1}{n}=\int_0^1\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}dx=-\frac{4}{\pi}\ln\left|\cos\frac{\pi x}{4}\right|/_0^1$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln 1\right]=-\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{\pi}\ln 2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{4n}+...+\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n}\right)=\frac{2}{\pi}\ln 2$$

16. Calcular: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(a+\frac{2}{n}\right)+...+\ln\left(a+\frac{n}{n}\right)\right], a>0$

Solución

Aplicando la suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(a+\frac{2}{n}\right)+...+\ln\left(a+\frac{n}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(a+\frac{i}{n}\right).\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(a+x)dx\ \mathbf{...(1)}$$

Ahora integrando por partes se tiene:

Sea $\begin{cases}u=\ln(a+x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x+a}\\ v=x\end{cases}$

$$\int \ln(a+x)dx = x\ln(a+x) - \int \frac{x}{x+a}dx = x\ln(a+x) - \int \left(1-\frac{a}{x+a}\right)dx$$

$$= x \text{ Ln } (a + x) - x + a \text{ Ln } (x + a) = (x + a) \text{ Ln } (x + a) - x \quad \textbf{... (2)}$$

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(a+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(a+\frac{n}{n}\right)\right] = \int_0^1 \ln(a+x)dx = [(x+a)\ln(x+a)-x]/_0^1$$

$$= ((a + 1) \text{ Ln } (a + 1) - 1) - (a \text{ Ln } a - 0) = (a + 1) \text{ Ln } (a+1) - a \text{ Ln } a - 1$$

17. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^{500}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{500}}{(n+2)^{501}}+\ldots+\frac{n^{500}}{(n+n)^{501}}\right]$

Solución

Aplicando suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{500}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{500}}{(n+2)^{501}}+\ldots+\frac{n^{500}}{(n+n)^{501}}\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{501}}{(n+1)^{501}}+\frac{n^{501}}{(n+2)^{501}}+\ldots+\frac{n^{501}}{(n+n)^{501}}\right]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{501}+\left(\frac{n}{(n+2)}\right)^{501}+\ldots+\left(\frac{n}{(n+n)}\right)^{501}\right]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{501}}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{501}}+\ldots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^{501}}\right]=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{501}}.\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^{501}}$$

$$= -\frac{1}{500(x+1)^{500}}\Big/_0^1 = -\frac{1}{500}\left(\frac{1}{2^{500}}-1\right)=\frac{1}{500}\left(1-\frac{1}{2^{500}}\right)$$

18. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, donde a_n es dado por:

$$a_n = \frac{\ln(\frac{1+20n}{n})}{1+20n} + \frac{\ln(\frac{2+20n}{n})}{2+20n} + \ldots + \frac{\ln(21)}{n+20n}$$

Solución

Aplicando la suma de Riemann se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(\frac{1+20n}{n})}{1+20n} + \frac{\ln(\frac{2+20n}{n})}{2+20n} + \ldots + \frac{\ln(21)}{n+20n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(20+\frac{1}{n})}{20+\frac{1}{n}} + \frac{\ln(20+\frac{2}{n})}{20+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{\ln(20+\frac{n}{n})}{20+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(20+\frac{i}{n})}{20+\frac{i}{n}}.\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{\ln(20+x)}{20+x}dx = \frac{\ln^2(20+x)}{2}\Big/_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln^2 21 - \ln^2 20\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\left[\ln^2 21 - \ln^2 20\right]$$

19. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(\operatorname{sen}\frac{3}{n})e^{1/n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} + \frac{(\operatorname{sen}\frac{6}{n})e^{2/n}}{\operatorname{sen}\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{(\operatorname{sen}\frac{n}{n})e^{n/n}}{\operatorname{sen}(\frac{n}{n})}\right]$

Solución

Sea $a_n = \left[\frac{(\operatorname{sen}\frac{3}{n})e^{1/n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} + \frac{(\operatorname{sen}\frac{6}{n})e^{2/n}}{\operatorname{sen}\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{(\operatorname{sen}\frac{n}{n})e^{n/n}}{\operatorname{sen}(\frac{n}{n})}\right]\frac{1}{n}$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} 3(\frac{i}{n})e^{i/n}}{\operatorname{sen}\frac{i}{n}}.\frac{1}{n},$$ ahora tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} 3(\frac{i}{n})e^{i/n}}{\operatorname{sen}\frac{i}{n}}.\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} e^x \; = \int_0^1 \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x} e^x dx$$

$$= \int_0^1 3e^x dx - \int_0^1 4\operatorname{sen}^2 x.e^x dx = \int_0^1 3e^x dx - 4\int_0^1 \frac{e^x(1-\cos 2x)}{2} dx = \int_0^1 e^x dx + 2\int_0^1 e^x \cos 2x dx$$

$$= [e^x + \frac{2}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x)]/_0^1 \; = \frac{1}{5}(5e - 7 + 2e.\cos 2x + 4e.\operatorname{sen} 2x)$$

20. Verificar que:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{1+2n+2n^2} + \frac{n}{4+4n+2n^2} + ... + \frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2}] = \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$$

Solución

Sea $a_n = \frac{n}{1+2n+2n^2} + \frac{n}{4+4n+2n^2} + ... + \frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2}$

dividiendo entre n^2 al numerador y denominador.

$$a_n = [\frac{1}{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{2+2(\frac{2}{n})+\frac{4}{n^2}} + ... + \frac{1}{2+2n(\frac{n}{n})+\frac{n^2}{n^2}}]\frac{1}{n}$$

$$a_n = [\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+2(\frac{1}{n})+2} + \frac{1}{(\frac{2}{n})^2+2(\frac{2}{n})+2} + ... + \frac{1}{(\frac{n}{n})^2+2(\frac{n}{n})+2}]\frac{1}{n}$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{(\frac{i}{n})^2+2(\frac{i}{n})+2}).\frac{1}{n},$$ ahora tomamos límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\frac{i}{n})^2+2(\frac{i}{n})+2}.\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1)\,/_0^1 = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$$

Nota: $\begin{cases} z = \operatorname{arctg} 2 \\ y = \operatorname{arctg} 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} z = 2 \\ \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

$$\operatorname{tg}(z-y) = \frac{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} y.\operatorname{tg} z} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} = \operatorname{tg}(z-y) = \frac{1}{3} \Rightarrow z-y = \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$$

=arctg 2 - arctg 1 = arctg 1/3

21. Probar que: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}) = \ln 2$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}]\frac{1}{n} = 0 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}).\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\,/_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}) = \ln 2$$

22. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\ldots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\,\Big/_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]=\frac{\pi}{4}$$

23. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n})}{1+n}+\frac{\operatorname{arctg}(\frac{2}{n})}{2+n}+\ldots+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n})}{1+n}+\frac{\operatorname{arctg}(\frac{2}{n})}{2+n}+\ldots+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{1+n}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{n}}{2+n}+\ldots+\frac{arc.\operatorname{tg}.\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{arc.\operatorname{tg}.(\frac{i}{n})}{1+(\frac{i}{n})}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{arc.\operatorname{tg}x}{1+x}dx \quad \ldots(1)$$

Integrando por partes se tiene: $\begin{cases} u=\operatorname{arctg}x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=\dfrac{dx}{1+x} \Rightarrow & v=\ln(1+x)\end{cases}$

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}dx=\operatorname{arctg}x.\ln(1+x)\,\Big/_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\ =\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \quad \ldots(2)$$

Ahora haremos $x=\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta\,d\theta$, para $x=0$; $\theta=0$, $x=1$; $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}\theta)}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}\theta)d\theta$$

Como $1+\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta)+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta}$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}\theta)d\theta=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}d\theta+\int_0^{\pi/4}\ln\left(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\right)d\theta-\int_0^{\pi/4}\ln\cos\theta d\theta$$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\left(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\right)d\theta-\int_0^{\pi/4}\ln(\cos\theta)d\theta \quad \text{... (3)}$$

Sea $u=\dfrac{\pi}{4}-\theta \Rightarrow du=-d\theta$, $\quad \theta=0;\ u=\dfrac{\pi}{4};\ \theta=\dfrac{\pi}{4};\ u=0$

$$\int_0^{\pi/4}\ln\left(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\right)d\theta=\int_{\pi/4}^{0}\ln(\cos u)(-du)=\int_0^{\pi}\ln(\cos u)du \quad \text{... (4)}$$

Ahora reemplazamos (4) en (3) se tiene:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi\ln 2}{8}+\int_0^{\pi/4}\ln(\cos u)du-\int_0^{\pi/4}\ln(\cos\theta)d\theta=\frac{\pi\ln 2}{8} \quad \text{... (5)}$$

Ahora reemplazamos (5) en (2) se tiene:

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi\ln 2}{8}=\frac{\pi}{8}\ln 2 \quad \text{... (6)}$$

Por último reemplazando (6) en (1) se tiene:

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{1+n}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{n}}{2+n}+\ldots+\frac{\frac{\pi}{4}}{n+n}\right)=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

24. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$b_n = \sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}...u_n^{u_n}}$, con $u_p = 1+\dfrac{P}{n}$, calcular su límite si es convergente.

Solución

Sea $\quad k = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \ln k = \ln(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(b_n)$

$$\ln k = \lim_{n\to\infty} \ln\sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}...u_n^{u_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(u_1^{u_1}.u_2^{u_2}...u_n^{u_n}),$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[u_1 \ln u_1 + u_2 \ln u_2 + ... + u_n \ln u_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(1+\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{2}{n})\ln(1+\frac{2}{n}) + ... + (1+\frac{n}{n})\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (1+\frac{i}{n})\ln(1+\frac{i}{n}).\frac{1}{n} = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)dx$$

$$\ln k = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)dx = [\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{(x+1)^2}{4}]\Big/_0^1 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\ln k = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \Rightarrow k = e^{2\ln 2 - \frac{3}{4}} = 4e^{-\frac{3}{4}}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1^{u_1}.u_2^{u_2}...u_n^{u_n}} = 4e^{-\frac{3}{4}}$$

25. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(an+b)(an+2b)...(an+nb)}$

Solución

Sea $\quad b_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(an+b)(an+2b)...(an+nb)}$

$$b_n=\sqrt[n]{(a+\frac{b}{n})(a+\frac{2}{n}b)\ldots(a+\frac{2}{n}b)}$$

$$\ln(b_n)=\frac{1}{n}[\ln(a+\frac{b}{n})+\ln(a+\frac{2}{n}b)+\ldots+\ln(a+\frac{n}{n}b)]$$

$\ln(b_n)=\sum_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n}b.)\frac{1}{n}$, tomando límite $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n}b).\frac{1}{n}$

$$\ln(\lim_{n\to\infty}b_n)=\int_0^1\ln(a+bx)dx\;=[x\ln(a+bx)+\frac{a}{b}\ln(a+bx)-x]\Big/_0^1$$

$$=\ln(a+b)+\frac{a}{b}\ln(a+b)-1-\frac{a}{b}\ln a=\ln(a+b)+\frac{a}{b}\ln(\frac{a+b}{a})-1$$

$$=\frac{1}{b}[\ln(a+b)^b+\ln(\frac{a+b}{a})^a]-1=\frac{1}{b}\ln(\frac{(a+b)^b(a+b)^a}{a^a})-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(b_n)=\ln\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a.e^b}}\qquad\therefore\lim_{n\to\infty}b_n=\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a.e^b}}=\frac{(a+b)^{1+\frac{a}{b}}}{a^{a/b}.e}$$

26. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n}$

Solución

Sea sen 2a = 2 sen a.cos a $\Rightarrow$ $\cos a=\frac{\operatorname{sen}2a}{2\operatorname{sen}a}$.

$$\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}a}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^2}}.\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^3}}\ldots\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^{n-1}}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}=\frac{\operatorname{sen}a}{2^n\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}a}{2^n\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}\qquad\ldots(1)$$

Sea $Z=\dfrac{a}{2^n} \Rightarrow \dfrac{z}{a}=\dfrac{1}{2^n}$, cuando $n \to \infty \Leftrightarrow z \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a}{2^n \operatorname{sen}\frac{a}{2^n}} = \operatorname{sen} a. \lim_{z\to 0} \frac{z}{a \operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen} a}{a} \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen} a}{a}(1) = \frac{\operatorname{sen} a}{a} \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} a}{a}$$

27. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1-\operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2^i}\right)$

Solución

Sea $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$$\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} = (1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x \text{ , de donde: } 1-\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^i}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^2}\right)\ldots\left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos a}{\cos^2 \frac{a}{2}}.\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2^2}}\ldots\frac{\cos(\frac{a}{2^{n-1}})}{\cos^2 \frac{a}{2^n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos a}{\cos(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2^2})\ldots\cos^2 \frac{a}{2^n}}$$

$$= \cos . a . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}} . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^n}} = \cos . a(1)\left(\frac{a}{\operatorname{sen} a}\right) = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^i}\right) = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

28. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Solución

Este límite se obtiene acotando, es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

sumando

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ahora tomando límite se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

29. **Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{S_n\}_{n\ge 1}$, donde:**

$$S_n = 2(\frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4})^2 + 4(\frac{1}{4})^3 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^n$$

Solución

Sea $S_n = 2(\frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4})^2 + 4(\frac{1}{4})^3 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^n$ **... (1)**

Multiplicando por $\frac{1}{4}$ a la expresión (1) se tiene:

$\frac{1}{4}S_n = 2(\frac{1}{4})^2 + 3(\frac{1}{4})^3 + 4(\frac{1}{4})^4 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$ **... (2)**

Restando la expresión (2) de la expresión (1) se tiene:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{4})^4 + \dots + (\frac{1}{4})^n - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots + (\frac{1}{4})^{n-1}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2[1 + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + \dots + (\frac{1}{4})^{n-2}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$\frac{3}{4}S_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2[\frac{1-(\frac{1}{4})^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}] - (n+1)(\frac{1}{4})^{n+1}$$

$$S_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}[\frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{n-1})]-\frac{4}{3}\frac{(n+1)}{4^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}[\frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{n-1})]-\frac{4}{3}\frac{(n+1)}{4^{n+1}})$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{12}[\frac{4}{3}(1-0)]-\frac{4}{3}(0)=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-0=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{7}{9}$$

30. Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$$S_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(n^3+1)}$$

Solución

$$S_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)...(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)...(n^3+1)}$$

$$S_n=\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)(4-1)(4^2+4+1)...(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1)(4+1)(4^2-4+1)...(n+1)(n^2-n+1)}$$

Como $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$, $(n+1)^3+1=(n+1+1)((n+1)^2-(n+1)+1)$

$$=(n+2)(n^2+n+1)$$

$$S_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{1.2.3...(n-2)(n^2-n+1)(n-1)(n^2+n+1)}{9.4.5.6.7...n(n^2-3n+3)(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5...(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.4.5.6.7...n(n+1)(n^2-3n+3)}=\frac{1.2.3.(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.n(n+1)(n^2-3n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.(n-2)(n-1)(n^2+n+1)}{9.n(n+1)(n^2-3n+3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}$$

31. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} + \frac{1}{n}\right] - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[1 + \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^n}\right]\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right)\left(1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right] - \frac{1}{n} = e - 1 - 0 = e - 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right) = e - 1$$

32. Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$

Solución

Aplicando el criterio de la razón para sucesiones convergentes

$$S_n = \frac{2^n n!}{n^n} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n.n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}.n^n.(n+1)!}{2^n.(n+1)^{n+1}.n!} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} \qquad = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

Luego por el criterio de la razón se tiene:

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n} = 0$$

Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)\ldots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)\ldots(n^2+(2n+1))}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)\ldots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)\ldots(n^2+(2n+1))}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2})\ldots(1-\frac{n}{n^2})}{(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})(1+\frac{5}{n^2})..(1+\frac{2n+1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(1-\frac{1}{n^2})^{-n^2}\right]^{-\frac{1}{n^2}}\left[(1-\frac{2}{n^2})^{-\frac{n^2}{2}}\right]^{-\frac{2}{n^2}}\ldots\left[(1-\frac{n}{n^2})^{-\frac{n^2}{n}}\right]^{-\frac{n}{n^2}}}{\left[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right]^{\frac{1}{n^2}}\left[(1+\frac{3}{n^2})^{\frac{n^2}{3}}\right]^{\frac{3}{n^2}}\ldots\left[(1+\frac{2n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{2n+1}}\right]^{\frac{2n+1}{n^2}}}$$

$$= \frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+3+5+...+(2n+1))}} = \frac{e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}}} = \frac{e^{-1/2}}{e} = e^{-3/2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))} = e^{-3/2}$$

34. Analizar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$$P_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}...\binom{n}{n}}}$$

<u>Solución</u>

Sea $A = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}...\binom{n}{n}}$, tomando logaritmos en ambos lados se tiene: $\ln A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\binom{n}{1}+\ln\binom{n}{2}+\ln\binom{n}{3}+...+\ln\binom{n}{n}}{n^2}$, por el criterio de STOLZ.

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{[\ln\binom{n}{1}+\ln\binom{n}{2}+...+\ln\binom{n}{n}]-[\ln\binom{n-1}{1}+\ln\binom{n-1}{2}+...+\ln\binom{n-1}{n-1}]}{n^2-(n-1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n-1}{1}}\right)+\ln\left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}}\right)+...+\ln\left(\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{n-1}}\right)}{2n-1}$$

$$Ln\ A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n-1}{1}}\right).\left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}}\right)...\left(\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{n-1}}\right)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}\right)}{2n-1} \quad ...\ \textbf{(1)}$$

Calculando el coeficiente $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}$ se tiene:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}}=\frac{(n-1-k)!n!}{(n-k)!(n-1)!}=\frac{n}{n-k} \qquad \text{.... (2)}$$

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene:

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{n-k}\right)\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^n-\ln\sqrt{2\pi n}}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln n}{2n-1}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\Rightarrow \ln A=\frac{1}{2}\text{ ,de donde: } A=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

$$\therefore\ A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}}}=\sqrt{e}$$

35. Si $b_1 = 1$, $b_n=\frac{1}{4}(2b_{n-1}+3)$ para $n \geq 2$, demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 2}$, converge.

Solución

Probaremos que la sucesión es creciente y acotada superiormente:

a. Demostraremos por inducción que $b_n < b_{n+1}$, $\forall$ n.

i. para n = 2 $\Rightarrow$ $b_2 = \frac{1}{4}(2b_1 + 3) = \frac{1}{4}(2+3) = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$. $b_1 < b_2$

ii. Supongamos que se cumple n = h (hipótesis inductiva)

$$b_h < b_{h+1}$$

iii. Demostraremos que se cumple para n = h + 1, es decir, que se cumple: $b_{h+1} < b_{h+2}$, entonces:

$$\text{Como} \quad b_{h+1} < b_{h+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}b_n < \frac{1}{2}b_{h+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{4} < \frac{1}{2}b_{h+1} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(2b_n + 3) < \frac{1}{4}(2b_{h+1} + 3)$$

entonces $b_{h+1} < b_{h+2}$, cumple, por lo tanto : $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

b. Demostraremos que $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente ó sea $b_n < 2$.

i. Si n = 2 $\Rightarrow$ $b_2 = \frac{1}{4}(2+3) = \frac{5}{4} < 2$, cumple.

ii. Supongamos que se cumple $b_h < 2$ (hipótesis inductiva)

Demostraremos que: $b_{h+1} < 2$ es decir:

$$b_h < 2 \quad \Rightarrow \quad 2b_h < 4 \quad \Rightarrow \quad 2b_h + 3 < 7$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(2b_h + 3) < \frac{7}{4} < 2 \quad \Rightarrow \quad b_{h+1} < 2$$

$\therefore$ $\{b_n\}_{n>1}$ es acotada.

c. Calculando el limite se tiene:

Sea $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}(2b_{n-1}+3)$

$$b = \frac{1}{4}(2\lim_{n\to\infty} b_{n-1}+3) \Rightarrow b = \frac{1}{4}(2b+3), \quad \text{de donde:} \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

Nota.- Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión convergente entonces: $\exists a$, tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-2} = a$

36. Si $b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{6}(2b_{n-1}+3)$, analizar la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ y si converge calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Solución

$b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{6}(2b_{n-1}+3)$. Demostraremos que se trata de una sucesión de (CAUCHY). primeramente observamos que:

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{6}(2b_1+3) - 2 = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{5}{6}, \text{ entonces: } |b_2 - b_1| = \frac{1}{3}.\frac{5}{2}$$

$$|b_3 - b_2| = \left|\frac{1}{6}(2b_2+3) - \frac{1}{6}(2b_1+3)\right| = \frac{1}{3}|b_2 - b_1| \Rightarrow |b_3 - b_2| = \frac{1}{3^2}.\frac{5}{2}$$

$$\vdots$$

$$|b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{6}(2b_{n-1}+3) - \frac{1}{6}(2b_{n-2}+3)$$

$$= \frac{1}{3}(b_{n-1} - b_{n-2}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3^{n-1}}.\frac{5}{2} = \frac{1}{3^n}.\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow |b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{3^n}.\frac{5}{2}.$$

Además $|b_n - b_j| < |b_{n+1} - b_n|$; $\forall$ j > n + 1 **... (1)**

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{3^n.2} = 0$, entonces $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M > 0$, tal que: $\left|\frac{5}{3^n.2} - 0\right| < \varepsilon$, $\forall$ n > M,

es decir $\frac{5}{3^n.2} < \varepsilon \Rightarrow 3^n > \frac{5}{2\varepsilon}$, entonces: $n\ln 3 > \ln(\frac{5}{2\varepsilon}) \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{5}{2\varepsilon})}{\ln 3} = M_1$.... **(2)**,

entonces : $\forall$ n, j > M, tenemos de **(1)** y **(2)** , $\left|b_n - b_j\right| \le \frac{5}{3^n.2} < \varepsilon$.

Por lo tanto, la sucesión $\{b_n\}_{n\ge 1}$, es una sucesión de Cauchy y por consiguiente es convergente.

También que $b_{n+1} - b_n < 0$ es decir, $b_{n+1} < b_n$ entonces: $\{b_n\}_{n\ge 1}$ es una sucesión decreciente.

- Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, hacemos $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$, entonces:

$$r = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(2b_n + 3) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} b_n + \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{3}r + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2r}{3} = \frac{1}{2}, \text{ entonces:}$$

$$r = \frac{3}{4} \qquad\qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$$

37. Determinar si la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}_{n\ge 1}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución

Sea $S_n = \frac{n}{2^n} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, $\forall$ n $\in Z^+$, n > 1, sumando n se tiene:

2n > n + 1 de donde al multiplicar por $\frac{1}{2^n}$ se tiene: $\frac{n}{2^n} > \frac{n+1}{2^{n+1}}$, lo que es lo mismo escribir en la forma:

$\frac{n+1}{2^{n+1}} < \frac{n}{2^n}$, de donde: se tiene $S_{n+1} < S_n$ $\forall$ n > 1,por lo tanto la sucesión

$\{\frac{n}{2^n}\}_{n\geq 1}$, es decreciente.

38. Probar la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ..., converge a 2.

Solución

A la sucesión dada expresaremos así:

$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2a_1}$, $a_3 = \sqrt{2a_2}$, ..., $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, n > 1.

Ahora demostraremos que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y acotada superiormente por 2. La demostración lo haremos por inducción matemática.

i. para n =1, $a_1 = \sqrt{2} < 2$ y $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$

ii. Suponiendo que para n = h, $a_h < 2$ y $a_h < a_{h+1}$

iii. Probaremos para n = h + 1

$a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{4} = 2$, pues $2a_h \leq 4$ (hipótesis inductiva)

$\Rightarrow a_{h+1} \leq 2$ y $a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{2a_{h+1}} = a_{h+2}$ pués $2a_h \leq 2a_{h+1}$ (hipótesis inductiva), entonces: $a_{h+1} \leq a_{h+2}$. Luego la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a 2.

39. Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión definida por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = (2+x_n)^{1/2}$, n $\in Z^+$

Solución

Sea $x_1 = \sqrt{2}$

$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}$

$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_2}$

$\vdots$

$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$, para n > 1.

Ahora veremos si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente.

Se observa que : $x_1 = \sqrt{2} < 2$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2, \text{ donde: } x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$$

$$x_3 = \sqrt{2+x_2} < 2, \text{ donde: } x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = x_3$$

es decir, que: $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, luego $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es no decreciente.

Ahora demostraremos que es acotada superiormente por 2, probaremos esto por inducción matemática.

Sea $n \in Z^+$ tal que: $x_n \leq 2$ y $x_n \leq x_{n+1}$

i. $1 \in Z^+$

ii. Suponemos que $h \in Z^+$ es decir: $x_h \leq 2$ y $x_h \leq x_{h+1}$, entonces:

$$x_{h+1} = \sqrt{2+x_h} \leq \sqrt{2+2} = 2 \quad \text{y} \quad x_{h+1} = \sqrt{x_{h+1}^2} = \sqrt{2+x_h} \leq \sqrt{2+x_{h+1}} = x_{h+2}$$

Por hipótesis inductiva, es decir: $h \in Z^+ \Rightarrow h+1 \in Z^+$ esto demuestra que: $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es no decreciente y acotada superiormente, entonces es $\{x_n\}_{n\geq 1}$, es convergente.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y desde que $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a \Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ y } a = -1$$

Luego se toma a = 2 por ser sucesión de términos positivos $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

40. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en R, definida por:

$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ldots,u_n = \frac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1})$, para n > 2.

Estudiar la convergencia ó divergencia de la sucesión y en caso de convergencia halle $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Solución

Por definición de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ se tiene

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2 \quad \text{además} \quad u_n = \frac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1})$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}(u_3 + u_2) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + 2) = \frac{7}{2^2}$$

$$u_5 = \frac{1}{2}(u_4 + u_3) = \frac{1}{2}(\frac{7}{2^2} + \frac{3}{2}) = \frac{13}{2^3}$$

$$u_6 = \frac{1}{2}(u_5 + u_4) = \frac{1}{2}(\frac{7}{2^2} + \frac{13}{2^3}) = \frac{27}{2^4}$$

$$u_7 = \frac{1}{2}(u_6 + u_5) = \frac{1}{2}(\frac{27}{2^4} + \frac{13}{2^3}) = \frac{53}{2^5}\ ,\ \ldots$$

$|u_2-u_1|=1$, $|u_3-u_2|=\frac{1}{2}$, $|u_4-u_3|=\frac{1}{2^2}$, $|u_5-u_4|=\frac{1}{2^3}$, $|u_6-u_5|=\frac{1}{2^4}$,

$|u_7-u_6|=\frac{1}{2^5},\ldots,$ $|u_{n+1}-u_n|=\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{2^n}$ como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2^n}=0$, entonces, podemos encontrar n tal que: $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, entonces $\forall$ n, j > M. Tenemos $|a_n-a_j|<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$, luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$,es una sucesión de cauchy, esto es que $\forall$ ε > 0, ∃ M > 0 / n, j > M.

$$\Rightarrow |a_n-a_j|<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon \Rightarrow 2^n>\frac{2}{\varepsilon}, \text{ donde: } n\ln 2>\ln\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln 2}=M>0$$

por consiguiente $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es convergente

Teorema.- Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge al mismo punto.

Hallaremos una subsucesión de $\{u_n\}_{n\geq 1}$.

$$u_1=1,\ u_3=1+\frac{1}{2},\ u_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3},\ u_{2n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$u_{2n+1}=1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}})=1+\frac{1}{2}(\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}})=1+\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{4})^n)$$

$$\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{4})^n))=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Luego por la conservación anterior se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{5}{3}$$

41. La sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ está definida como sigue:

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{5u_1},\dots,\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, analizar si $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es monótona y acotada, calcular el límite si existe.

Solución

Primeramente veremos si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona, como

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{5u_1},\ u_3 = \sqrt{5u_2},\dots,\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, entonces :

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{5},\ u_3 = \sqrt{5\sqrt{5}},\ u_4 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\dots$ es decir: $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \dots$

Luego la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona creciente.

Ahora veremos si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, de la definición tenemos: $u_n \geq 1,\ \forall$ n $\in Z^+$ además como : $\sqrt{5} < 5 \Rightarrow 5\sqrt{5} < 25 \Rightarrow \sqrt{5\sqrt{5}} < 5$

$$\Rightarrow 5\sqrt{5\sqrt{5}} < 25 \Rightarrow \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} < 5,\dots,\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\dots\sqrt{5}}}} < 5$$

entonces: $u_n < 5$, es decir: $1 \leq u_n < 5,\ \forall$ n $\in Z^+$.

Luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, por consiguiente la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es convergente, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 5$, pues la sucesión es creciente.

También podemos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, haciendo $r = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, y como $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5u_n} \Rightarrow r = \sqrt{5r} \Rightarrow r^2 = 5r$, de donde: r = 0 $\vee$ r = 5, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 5$, no puede ser cero ("0") pues la sucesión es creciente y $u_n \geq 1, \forall$ n $\in Z^+$.

42. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}$

Solución

Para calcular este límite aplicamos el criterio de STOLZ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=L$$

$$\begin{cases} a_n=1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 \\ b_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1}=1^2+3^2+5^2+...+(2n-3)^2 \\ b_{n-1}=1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2 \end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=(2n-1)^2;\quad b_n-b_{n-1}=n^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^2}=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=4$$

43. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}(\cos\dfrac{t}{n})^n$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}(\cos\frac{t}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{n})^n \;...\;\mathbf{(1)}$$

Calculando $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1}$ (por el criterio de STOLZ)

$$\begin{cases} a_n=1+4+7+...+(3n-2) \\ b_n=n^2+7n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1}=1+4+7+...+(3n-5) \\ b_{n-1}=n^2+5n-5 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+6} = \frac{3}{2} \quad \text{... (2)}$$

Sea $z = \frac{t}{n} \Rightarrow n = \frac{t}{z}$, cuando n $\to \infty$, z $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} (\cos\frac{t}{n})^n = \lim_{z\to 0} (\cos z)^{t/z} = \lim_{z\to 0} \left[(1+(\cos z - 1))^{\frac{1}{\cos z-1}}\right]^{\frac{t(\cos z-1)}{z}}$$

$$= e^{\lim\limits_{z\to 0} t\left(\frac{\cos z-1}{z}\right)} = e^0 = 1 \quad \text{... (3)}$$

Ahora reemplazamos **(2)** y **(3)** en **(1)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2+7n+1} (\cos\frac{t}{n})^n = (\frac{3}{2})(1) = \frac{3}{2}$$

4. Analizar la convergencia ó divergencia de la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ donde $u_n = \sqrt[n]{\frac{30^n + 40^n + ... + 600^n}{n}}$

Solución

$\forall$ n $\in Z^+$, $30^n \leq 40^n$, $40^n \leq 50^n, \ldots, 590^n \leq 600^n$

$$600^n \leq \frac{30^n + 40^n + ... + 600^n}{n} \leq 58x600^n$$, donde: 58 es el número de sumandos

$$\Rightarrow 600 \leq \sqrt[n]{\frac{30^n + 40^n + ... + 600^n}{n}} \leq 600_x 58^{1/n}$$

Luego según el teorema del encaje **(1.8)** se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} 600 = \lim_{n\to\infty} 600_x 58^{1/n} = 600 \text{ de donde : } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{30^n + 40^n + ... + 600^n}{n}} = 600$$

por lo tanto la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

45. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n-2}$

Solución

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2} \\ b_n = 3n^2+5n-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1} = \sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+(n-1)^2} \\ b_{n-1} = 3n^2-n-5 \end{cases}$$

Ahora aplicamos el criterio de STOLZ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{6n+2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+...+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n-2} = \frac{1}{6}$$

46. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{n} \ln[(1+\cos\frac{\pi}{n})(1+\cos\frac{2\pi}{n})...(1+\cos\frac{n\pi}{n})]$

Solución

Aplicando Riemann se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \ln[(1+\cos\frac{\pi}{n})(1+\cos\frac{2\pi}{n})...(1+\cos\frac{n\pi}{n})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} [\ln(1+\cos\frac{\pi}{n}) + \ln(1+\cos\frac{2\pi}{n}) + ... + \ln(1+\cos\frac{n\pi}{n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\cos\frac{i\pi}{n}) = \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx \quad \textbf{... (1)}$$

Ahora calculamos la integral $\int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx$, mediante la introducción de un parámetro.

Sea $F(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1+\alpha\cos x)dx$, derivando con respecto a α.

$$F'(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}dx$$ (integración de función racional de seno y coseno)

Sea $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z \Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

para $x=0,\ z=0\ ;\ x=\pi,\ z\to\infty$

$$F'(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\cos x dx}{1+\alpha\cos x}=\int_0^\infty \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\alpha(\frac{1-z^2}{1+z^2})}\frac{2dz}{1+z^2}=2\int_0^\infty \frac{(1-z^2)dz}{[1+z^2+\alpha(1-z^2)](1+z^2)}$$

$$=-2\int_0^\infty \frac{(z^2-1)dz}{[1+\alpha+(1-\alpha)z^2](1+z^2)}=-\frac{2}{1-\alpha}\int_0^\infty \frac{(z^2-1)dz}{(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+z^2)(1+z^2)}$$

$$=\frac{2}{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)} \qquad \text{...(1)}$$

donde: $a=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$

calculando la integral $\int \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)}$

$$\int \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)}=\int (\frac{Az+B}{z^2+a^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1})dz \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{z^2-1}{(z^2+a^2)(z^2+1)}=\frac{Az+B}{z^2+a^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1}=\frac{(Az+B)(z^2+1)+(Cz+D)(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)(z^2+1)}$$

$$z^2-1=A(z^3+z)+C(z^3+a^2z)+B(z^2+1)+D(z^2+a^2)$$

$$=(A+C)z^3+(B+D)z^2+(A+a^2C)z+B+a^2D$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=1 \\ A+a^2C=0 \\ B+a^2D=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{a^2+1}{a^2-1} \\ C=0 \\ D=-\dfrac{2}{a^2-1} \end{cases} \qquad \textbf{... (3)}$$

reemplazando **(3)** en **(2)** se tiene:

$$\int\frac{(z^2-1)dz}{(z^2+a^2)(z^2+1)}=\frac{a^2+1}{a^2-1}\int\frac{dz}{z^2+a^2}-\frac{2}{a^2-1}\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$=\frac{a^2+1}{a^2-1}.\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}-\frac{2}{a^2-1}\operatorname{arctg} z \qquad \textbf{... (4)}$$

Ahora reemplazamos **(4)** en **(1)**

$$F'(\alpha)=-\frac{2}{1-\alpha}\left[\frac{a^2+1}{a^2-1}.\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}-\frac{2}{a^2-1}\operatorname{arctg} z\right]\Big/_0^\infty$$

$$=-\frac{2}{1-\alpha}\left[\frac{a^2+1}{a^2-1}.\frac{1}{a}.\frac{\pi}{2}-\frac{2}{a^2-1}.\frac{\pi}{2}\right]=-\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{a^2+1-2a}{(a^2-1)a}\right]=-\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{(a-1)^2}{(a^2-1)a}\right]$$

$$F'(\alpha)=-\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{a-1}{(a+1)a}\right]=-\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}-1}{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{1-\alpha}\,\frac{\left(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}\right)\sqrt{1-\alpha}}{1+\alpha+\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1-\alpha}}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1-\alpha}\right)}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(\frac{2\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)}{2\sqrt{1+\alpha}}\right) = -\pi\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) \quad = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,.$$

Ahora integrado $F(\alpha) = \int \left(\pi - \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha + k$ = π α - π arc.sen α+ k , para calcular k hacemos α = 0.

F(0) = π (0) - π (0) = k = 0 ⇒ k = 0 , de donde: F(α) = π α - π arc.sen α.

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1+\alpha\cos x)dx = \pi\alpha - \pi \arcsen\alpha$$

$$F(1) = \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx = \pi - \pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{2}$$

7. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6}{n^7}$, sin usar Riemann.

Solución

Aplicando el criterio de STOLZ, se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$, donde:

$$\begin{cases} a_n = 1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6 \\ b_n = n^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n-1} = 1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6 \\ b_{n-1} = (n-1)^7 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{7n^6-21n^5+35n^4-35n^3+21n^2-7n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7-\frac{21}{n}+\frac{35}{n^2}-\frac{35}{n^3}+\frac{21}{n^4}-\frac{7}{n^5}+\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{7-0+0-0+0-0+0} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6}{n^7} = \frac{1}{7}$$

48. Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\dfrac{1}{P+1}$ Si P > -1.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^P+(\frac{2}{n})^P+...+(\frac{n}{n})^P]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^P.\frac{1}{n}=\int_0^1 x^P dx=\frac{x^{P+1}}{P+1}\Big/_0^1=\frac{1}{P+1}-0=\frac{1}{P+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{P+1}$$

49. Sea, a ∈ R, arbitrario, $u_n(a)=1^a+2^a+...+n^a$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}$

Solución

$u_n(a)=1^a+2^a+...+n^a$, entonces: $u_n(a+1)=1^{a+1}+2^{a+1}+3^{a+1}+...+n^{a+1}$

$$n\,u_n(a)=n1^a+n2^a+...+n^{a+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a+1}+2^{a+1}+3^{a+1}+...+n^{a+1}}{n1^a+n2^a+...+n^{a+1}}\quad ,\text{ para } a=0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n+n+...+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Ahora calculamos para a > 0 (aplicando el criterio de STOLZ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)}{n\,u_n(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(a+1)-u_{n-1}(a+1)}{n\,u_n(a)-(n-1)u_{n-1}(a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1^{a+1}+2^{a+1}+...+n^{a+1})-(1^{a+1}+2^{a+1}+...+(n-1)^{a+1})}{(n1^a+n2^a+...+n.n^a)-((n-1)1^a+(n-1)2^a+...+(n-1)(n-1)^a)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{a+1}}{1^a + 2^a + \ldots + (n-1)^a + n.n^a} \quad \text{(nuevamente STOLZ)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{a+1} - (n-1)^{a+1}}{(1^a + 2^a + \ldots + (n-1)^a + n.n^a) - (1^a + 2^a + \ldots + (n-2)^a + (n-1)(n-1)^a)}$$

$$= \frac{1+a}{2}, \quad a > 0.$$

Simplificando: $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n(a+1)}{nu_n(a)} = \dfrac{(a+1)}{2}$, $a > 0$

50. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{n}[\ln(\dfrac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}) + \ldots + \ln(\dfrac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}})]$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}[\ln(\frac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}) + \ldots + \ln(\frac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}[(\ln(1+b\cos\frac{\pi}{n}) + \ldots + \ln(1+b\cos\frac{n\pi}{n})) - (\ln(1+a\cos\frac{\pi}{n}) + \ldots + \ln(1+a\cos\frac{n\pi}{n}))]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}[\sum_{i=1}^{n} \ln(1+b\cos\frac{i\pi}{n}) - \sum_{i=1}^{n} \ln(1+a\cos\frac{i\pi}{n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+b\cos\frac{i\pi}{n}).\frac{\pi}{n} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+a\cos\frac{i\pi}{n}).\frac{\pi}{n}$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1+b\cos x)dx - \int_0^{\pi} \ln(1+a\cos x)dx = \pi\ln(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{2}) - \pi\ln(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2})$$

$$= \pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{\pi}{n}}{1+a\cos\frac{\pi}{n}}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1+b\cos\frac{n\pi}{n}}{1+a\cos\frac{n\pi}{n}}\right)\right] = \pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$$

1.18 Ejercicios Propuestos.-

I. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión:

1. $\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq 1}$ 2. $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}_{n\geq 1}$ 3. $\{\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\}_{n\geq 1}$

4. $\{\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\}_{n\geq 1}$ 5. $\{\frac{\cos nx}{n^2+n}\}_{n\geq 1}$ 6. $\{\frac{n}{3^n+1}\}_{n\geq 1}$

7. $\{\frac{3n!}{(n-1)!}\}_{n\geq 1}$ 8. $\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1}$ 9. $\{5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\}_{n\geq 1}$

II. Escribir la expresión para el n-ésimo término de la sucesión.

1. $1, 4, 7, 10, \ldots$ 2. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$ 3. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$

4. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ 5. $2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \ldots$

6. $\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4}, \frac{3}{4.5}, \frac{4}{5.6}, \ldots$ 7. $1, \frac{1}{1.3}, \frac{1}{1.3.5}, \frac{1}{1.3.5.7}, \ldots$

III. Usando la definición de limite **(1.2)** demostrar que:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n}{3n+2} = -\frac{2}{3}$ 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2.10^n}{5+3.10^n}=\dfrac{2}{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=2$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} k=k$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=2$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n-4}=\dfrac{4}{5}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{1/n}=1$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{2n+3}=4$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}=0$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n-1}{n^2+n+1}=3$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n}{2+3n}=-\dfrac{1}{3}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{1}{n^2}\right)=a$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=0$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+8n+1}{5+3n-n^2}=-5$

IV. Calcular los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^4-5n+4}}{2n^2+n}$ Rpta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n+2})}{8n-4}}$ Rpta: $-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$ Rpta: $\dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{(1+n)(2+n)^2}$ Rpta: $-\dfrac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ Rpta: $e^{-1/2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n+a}{n+1})^{2n+3}$ Rpta: $e^{2(a-1)}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2})^n$ Rpta: $\sqrt{ab}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a'n+b'})$ Rpta: $\dfrac{a-a'}{2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\ln(n+1)}}$ Rpta: e^4

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2}$ Rpta: $\dfrac{2a}{3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{2n^4+n-1}$ Rpta: $\dfrac{1}{8}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}$ Rpta: $-\dfrac{3}{2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$ Rpta: 1

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sqrt[n]{\alpha}-n\right)$ Rpta: $\ln(\alpha)$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$ Rpta: 1

16. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\cos\dfrac{1}{n}-1)$ Rpta: $-\dfrac{1}{2}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2+1)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{(n^2-2)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ Rpta: $\dfrac{3}{2}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(na)}{\ln(nb)}\right)^{\ln(n)}$ Rpta: $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(6+18+30+\ldots+6(2n-1))$ Rpta: 6

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$ Rpta: $\dfrac{3}{2}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\sqrt[12]{n}$ Rpta: $\dfrac{3}{4}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4.\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n+2)\cos\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right)}$ Rpta: $3\sqrt{2}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[n]{n-1}}{\ln(n)}$ Rpta: 1

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\dfrac{2n-3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$ Rpta: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5e}}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)}$ Rpta: 1

26. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\mathrm{arctg}\,hn)\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}-\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]$ Rpta: $\dfrac{\pi\sqrt{e}}{8}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^P}\binom{n}{p}$ Rpta: $\dfrac{1}{P!}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n}}$ Rpta: 0

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\frac{n\pi}{2n-1}}{\sqrt[4]{n^4}+1}\right)$ Rpta: $-\dfrac{4}{\pi}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{(\sqrt{a^2})^{1/n}+(\sqrt{ab})^{1/n}+(\sqrt{b^2})^{1/n}}{3}\right]^n$ Rpta: ab

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[3\left(\dfrac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{4n^3}\right)\right]^{2n}$ Rpta: 1

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\ln(n)+\ln(n+1)^{-n}}{\ln(n)}$ Rpta: 1

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi}{4}.\cos\dfrac{\pi}{8}...\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ Rpta: $\dfrac{2}{\pi}$

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+...+\dfrac{1}{n^2-1}\right)$ Rpta: $\dfrac{3}{4}$

35. Determinar el límite de la sucesión.

$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$ Rpta: 2

36. Calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ Rpta: e^{-1}

37. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right]^n$, $a,b,c>0$

38. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = \dfrac{(4n+7)^{4n+7}\, n^{n-5}}{(16n+1)^{2n+2}(n+3)^{3n}}$ Rpta. $\dfrac{64}{e^{9/4}}$

39. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$ Rpta. 1

40. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

41. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(e^{-n})\operatorname{sen}(e^{-2n})\ln(n^4 3n^2-2n-4)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{1+2e^n})\operatorname{sen}(\frac{3}{2+e^{2n}})\ln(n^4-4n^3)}$

42. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1}]^{\sqrt{n}}$

43. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)^{4n}}{(\sum\limits_{k=1}^{n}4k^3)^n}$

44. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{a^{1/n}+c^{1/n}}{2}]$, $a,c>0$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{2n^8+5n^6+1}-\sqrt[4]{2n^8-3n^6+5n}$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+pn+q}-\sqrt{n^2+rn+s}$

V. Calcular los siguientes límites aplicando los criterios que les corresponde.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...+\frac{n+1}{n+2})$ Rpta: 1

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n}(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}+2^{\frac{7}{8}}+...+2^{\frac{2^n-1}{2^n}})$ Rpta: $\frac{2}{5}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt[3]{1-27n^3}}\frac{\ln(7n)}{\ln(9n)}(5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{7}{8}}+...+5^{\frac{2^n-1}{2^n}})$ Rpta: $-\frac{35}{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}(2\pi \cos\frac{2}{n})(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+...+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)})$ Rpta: 0

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3n^2+2n+1}(\frac{1}{6})(\frac{3}{12})...(\frac{2n-1}{6n})}$ Rpta: $\frac{1}{3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n(\frac{\ln 3}{\ln 7}.\frac{\ln 6}{\ln 14}...\frac{\ln 3n}{\ln 7n})}$ Rpta: 1

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9n}(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}+...+\sqrt[2n]{2^{2n-1}})$ Rpta: $\frac{2}{9}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$ Rpta: 1

9. $\lim\limits_{n\to\infty} [\frac{(\sqrt{25})^{1/n}+(\sqrt{40})^{1/n}+(\sqrt{64})^{1/n}}{3}]^n$ Rpta: 40

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n}(3^{2/4}+3^{5/7}+3^{10/12}+...+3^{\frac{n^2+1}{n^2+3}})$ Rpta: $\frac{3}{7}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{8}.\frac{5}{23}...\frac{n^2+1}{5n^2+1}}$ Rpta: $\frac{1}{5}$

VI. Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+...+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$ Rpta: $\frac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+...+\frac{n}{(n+n)^2})$ Rpta: $\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2})$ Rpta: $\frac{\pi}{4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ Rpta: $\frac{\ln 2}{2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$ Rpta: 0

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}$ Rpta: $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ Rpta: $\ln(1+\sqrt{2})$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2x^2}+\frac{n}{n^2+2^2x^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2x^2}\right)$ $x\neq 0$ Rpta: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\ldots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}}$ Rpta: $\frac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{P=1}^{n}Pe^{P/n}$ Rpta: 1

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{-\frac{1}{n^2}}+2e^{-\frac{4}{n^2}}+\ldots+n.e^{-1}\right)$ Rpta: $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.\cos^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\pi.\cos^2\frac{n-1}{n}\pi\right]$

Rpta: $-\frac{2}{3\pi}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+n)}$ Rpta: $\frac{4}{e}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\ln(n)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}+\frac{\ln(\frac{n}{2})}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{\ln(\frac{n}{n})}{\sqrt{1-\frac{n}{n}}}\right]$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\dots+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$ Rpta: $\dfrac{1}{\alpha+1}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{n+1}\right)\left(e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+\dots+e^{-\frac{n}{n}}\right)$ Rpta: $\pi(1-e^{-1})$

17. Si f(x) es continua en [a,b]. Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

18. Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t}{n}\left(\operatorname{sen}\dfrac{t}{n}+\operatorname{sen}\dfrac{2t}{n}+\dots+\operatorname{sen}\dfrac{n-1}{n}t\right)=\dfrac{1-\cos t}{t}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{2^2}{n^2}}+\dots+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\dfrac{n^2}{n^2}}\right]$

Rpta: $\dfrac{b}{2a}\sqrt{a^2-1}+\dfrac{ab}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{a}$

20. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^3}{n^4+1}+\dfrac{n^3}{n^4+2^4}+\dots+\dfrac{n^3}{n^4+n^4}\right]$

Rpta. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+2\sqrt{2})-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{16}$

21. Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} e^{100n}\operatorname{sen}(e^{-100n})\operatorname{sen}\left(\frac{n^4}{5n^5-6}\right)\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

22. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5n}\left[\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}+\dots+\sqrt[2n]{2^{2n-1}}\right]$

23. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}[1^p+2^p+\ldots+n^p][\operatorname{tg}\frac{1}{n}]^{p+1}$

24. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\frac{\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}+\frac{(\frac{2\pi}{n})\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}}+\ldots+\frac{(\frac{n\pi}{n})\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{n})}{1+\cos^2\frac{n\pi}{n}}\right]$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1}+2\sqrt[3]{2}+\ldots+n\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt[3]{n}}$ Rpta. $\frac{3}{7}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\ldots 4n}$ Rpta. $\frac{256}{27e}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(a+\frac{1}{n})^3+(a+\frac{2}{n})^3+\ldots+(a+\frac{n}{n})^3]$ Rpta. $a^3+\frac{3a^2}{2}$

28. Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$, definida como:

$a_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots+\frac{2n}{n^2+n}$ Rpta. $\frac{3}{4}$

VII. Determinar si las sucesiones dadas son convergentes ó divergentes.

1. $\{\frac{\ln(n)}{n^2}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

2. $\{\frac{e^n}{n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Diverge.

3. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

4. $\{\frac{n}{n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Diverge.

5. $\{\frac{4^n}{2^n+10^6}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Diverge.

6. $\{\frac{2^n}{4^n+1}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

7. $\{\ln(\frac{2^n}{n+1})\}_{n\geq 1}$ Rpta: Diverge.

8. $\{\ln(n)-Ln(n+1)\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

9. $\{\frac{\sqrt{n\,\text{sen}(e^n\pi)}}{n+1}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

10. $\{\int_0^n e^{-nx}dx\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

11. $\{\int_{1/n}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

12. $\{\sqrt{n(n+4)}-n\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

13. $\{\int_{-1+1/n}^{1+1/n} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

14. $\{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\}_{n>1}$ Rpta: Converge.

15. $\{\frac{\sqrt{n^2+5n-1}-\sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^2+3}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Converge.

16. $\{\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[5]{n}}\}_{n\geq 1}$

17. $\{\frac{\ln(2+e^n)}{3n}\}_{n\geq 1}$

18. $\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\}_{n\geq 1}$

19. $\{\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2n)^n}\}_{n\geq 1}$

20. $\{\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}\}_{n\geq 1}$

VIII.

A. Demostrar que:

1. $\lim\limits_{n\to 0} \frac{a^n}{n!} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0,\ a > 1$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(10{,}000)^n}{n!} = 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ si $0 < a < 1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$, si a, b, c > 0, c > a, c > b

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(a-1)(a-2)...(a-n)x^n}{n!} = 0$ si x ∈ <-1,1>

B. Hallar el límite de las sucesiones siguientes cuyo n-ésimo término es:

1. $a_n = \frac{1}{b}\sqrt[3]{b^2}.\sqrt[9]{b^4}.\sqrt[27]{b^8}......\sqrt[3^n]{b^{2n}}$ Rpta: b

2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[5]{n^5+n^4+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$ Rpta: $\frac{2}{15}$

3. $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+4n^2+1}$ Rpta: $-\frac{5}{6}$

4. $1; 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ Rpta: 0

5. $\frac{1}{1.1}, \frac{1}{1.01}, \frac{1}{1.001}, \frac{1}{1.0001}, \ldots$ Rpta: 1

6. $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ Rpta: 2

7. $0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, \ldots$ Rpta: $\frac{7}{30}$

8. $\sqrt{2}\ , \sqrt{2\sqrt{2}}\ , \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ \ldots$ Rpta: 2

9. $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}_{n\geq 1}$ Rpta: $\frac{1}{2}$

10. $\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: $\frac{1}{3}$

11. $\{\frac{n^{2/3}\operatorname{sen} n!}{n+1}\}_{n\geq 1}$ Rpta: 0

C. Si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Calcule los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ Rpta: 1

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4}$ Rpta: 1

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{n^n}}$ Rpta: 0

IX. **Determinar si cada sucesión dada es creciente, decreciente ó no monótoma.**

1. $\{\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

2. $\{\frac{n^2}{n+1}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

3. $\{(-1)^n\sqrt{n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: no Monótoma

4. $\{\frac{(n+1)^2}{n^2}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

5. $\{\frac{n^n}{n!}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

6. $\{\frac{4^n}{\sqrt{4n^2+1}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

7. $\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

8. $\{\frac{n!}{3^n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

9. $\{\frac{n^3-1}{n}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

10. $\{\cos \pi n\}_{n\geq 1}$ Rpta: No Monótoma

11. $\{\text{sen}\, \pi n\}_{n\geq 1}$ Rpta: No monótoma

12. $\{\frac{2^n}{n!}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

13. $\{\frac{4^n}{2^n+100}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Creciente

14. $\{\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

15. $\{\frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

16. $\{\ln(\frac{n+1}{n})\}_{n\geq 1}$ Rpta: Decreciente

X.

1. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, siendo $P_n = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[9]{a^4}.\sqrt[27]{a^8}...\sqrt[3^n]{a^{2n}}$ Rpta: a

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \cosh\frac{\alpha}{2}.\cosh\frac{\alpha}{2^2}.\cosh\frac{\alpha}{2^3}...\cosh\frac{\alpha}{2^n}$ Rpta: $\frac{\operatorname{senh}\alpha}{\alpha}$

3. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^P+2^P+3^P+...+n^P}{n^P}-\frac{P+1}{n}$ Rpta: $\frac{1}{2}$

4. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2n})$ si $|x| < 1$ Rpta: $\frac{1}{1-x}$

5. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} n^t\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$ siendo $\lim\limits_{n\to\infty} n^t a_n = a$ Rpta: $a.e^t$

6. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)^{n-p}}$ Rpta: e^{p+1}

7. Sea m $\in$ R arbitrario, si la sucesión $\{S_n(m)\}_{n\geq 1}$, esta definido por $S_n(m)=1^m+2^m+...+n^m$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(m+1)}{nS_n(m)}$

Rpta: Si m = 0, $S=\frac{1}{2}$, si m > 0, $S=\frac{1+m}{2+m}$, si m < 0, $S=\frac{1-m}{2-m}$

8. Determinar el parámetro λ para que el limite cuando n → ∞ de la expresión.

$A=[\frac{\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(k+2)}{\lambda n^2(n+1)}]^{\mu n}$ sea finito y determina el valor de u para que valga e, se supone u finito. Rpta: $\lambda=\frac{1}{6}$ $u=\frac{1}{8}$

9. Hallar $\lim_{n\to\infty} a_n$ siendo $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$. Sabiendo que $4a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}$, n > 4 Rpta: 3

10. Determinar el número α de manera que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{\alpha^3 n^m+n^2+1}+\sqrt[m]{(\alpha-2)n^m+n+1}$, sea finito (m impar m > 1) y calcular dicho límite para los distintos valores de m.

Rpta: α = 1, $\frac{1}{3}$ si m = 3 y si m = 5, 7

11. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha+2^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+3^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}+...+n^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}}{n^2}$ Rpta: $\frac{\alpha}{2}$

12. Probar que la sucesión $\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}},\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}},....$ converge a $\sqrt{3}$

13. Hallar el límite de la sucesión. a_1, a_2, $a_3,...,a_n,...$, en la que cada término es media aritmética de las dos que preceden. Rpta: $\frac{a_1+2a_2}{3}$

14. Hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(2+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+...+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$ Rpta: $\frac{e}{2}$(Sug. Stolz-Cesaro).

15. Hallar $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1/2}\left(\frac{1^{1/2}}{2}+\frac{2^{1/2}}{3}+\frac{3^{1/2}}{4}+...+\frac{n^{1/2}}{n+1}\right)$ Rpta: 2.

16. Hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n}$ Rpta: 1

17. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}}}$, siendo positivo todos los términos de la sucesión a_n y sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=k$

Rpta: $\sqrt{k}$ (Sug. Stolz-Cesaro)

18. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^n}$ Rpta: 1 (Sug. Stolz-Cesaro)

19. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)^n}{\ln(n!)}$ Rpta: 1 (Sug. STIRLING)

20. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n!)^2}$ Rpta: $\sqrt{\pi}$ (Sug. STIRLING)

21. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{2}{n})^x(1+\frac{3}{n})^x\ldots.(1+\frac{n}{n})^x}$

Rpta: $(\frac{4}{e})^x$(Sug.Formula de STIRLING)

22. Demostrar que: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2.2.4.4\ldots(2n)(2n)}{1.3.3.5.5\ldots.(2n-1)(2n-1)}=\dfrac{\pi}{2}$ (llamado la fórmula de WALLIS)

23. Aplicando la fórmula de Wallis, calcular

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.2.4.6\ldots(2n)}{n.1..3.5\ldots(2n-1)}=\sqrt{\pi}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.2.4.6\ldots(2n^2)}{n.1..3.5\ldots(2n^2-1)}=\sqrt{\pi}$

24. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2(a_n))}.\ln(\dfrac{2-a_n}{2-a_n-a_n^2})$ siendo $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión infinitésima y, tal que: $a_n\neq 0$, $\forall$ n Rpta: $\dfrac{1}{2}$

25. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$ Rpta: $\dfrac{e}{2\sqrt{\pi}}$ (Sug. Stolz-Cesaro)

26. Defínase una sucesión b_n, tal que: $b_0 = 1$, $b_1 = \dfrac{b_0^2+10}{2b_0}, \ldots, b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+10}{2b_n}$ estudiar la sucesión, en caso de convergencia calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

27. Demostrar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dado por $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$, n $\in Z^+$

28. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales definida por $a_1 = 1,\ a_2 = 2, \ldots, a_n = \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$ para n $\geq$ 3 probar que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{3}$

29. Analizar la convergencia de la sucesión y en caso de converger, calcular el limite de $x_1 = \sqrt{\dfrac{x_0^2+ab^2}{a+1}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1^2+ab^2}{a+1}}, \ldots\ldots, x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2+ab^2}{a+1}}$,tal que: x_0, a, b son reales fijos, a > 0 y $0 < x_0 < b$.

30. Si $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, y $a_1 \neq b_1$,definimos $a_2 = \sqrt{a_1.b_1}$, $b_2 = \dfrac{1}{2}(a_1+b_1)$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$. Probar que:

a. $a_2 < b_2$ **b.** $a_n < b_n$ **c.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

31. Si la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ esta definido por: $u_1 = 1, \ldots, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ ¿u_n es monótoma y acotada? si lo es, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

32. Dada la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ definida por: $b_1 > 1$ y $b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n}$ para $n \geq 1$, demostrar que $\{b_n\}_{n\geq 1}$, converge y luego calcular sus puntos de convergencia.

33. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$, tal que: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$, $a_{2n+2} = \frac{a_{2n} \cdot a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$, demostrar que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a 4.

34. Estudiar la convergencia de las sucesiones

a. $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

b. $\{b_n\}_{n\geq 1}$, $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{5}{8}, \ldots$ $b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{2}$,

35. Calcular $\lim\limits_{n\to 1} \ln(\frac{1}{n}).\ln(1+\frac{1}{n})$ y diga si es convergente ó divergente.

36. Demostrar que la sucesión $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}, \ldots$ converge $\sqrt{3}$.

37. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_n = \frac{((\frac{1}{n})^2+1)^{3/2}}{1} + \frac{((\frac{2}{n})^4+1)^{3/2}}{2} + \ldots + \frac{((\frac{n}{n})^2+1)^{3/2}}{n}$$

38. Sea $\{T_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $T_1 = 3$, $T_n + 1 = \frac{3(1+T_n)}{3+T_n}$ ¿ T_n es Monótoma y acotada?, verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \sqrt{3}$.

39. Dada la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ está definida por $u_1 = 1, \ldots, u_n = \sqrt{5+4u_{n-1}}$ para $n \geq 2$. Analizar si la sucesión es monótoma y acotada, de ser afirmativo, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

40. Analizar si las siguientes sucesiones son monótomas y acotadas, si lo son, calcular el límite de cada una.

a. $T_1 = 3^{1/3}, \ldots, T_n = (3T_{n-1})^{1/3}, \ \forall n \in Z^+ \ y \ n \geq 2.$

b. $S_o = 1, \ S_{n+1} = \dfrac{S_n^2 + 10}{2S_n}$, n está en Z_o^+.

c. $u_1 = \left(\dfrac{u_o^2 + ab^2}{a+1}\right)^{1/2}, \ u_2 = \left(\dfrac{u_1^2 + ab^2}{a+1}\right)^{1/2}, \ldots, \ u_{n+1} = \left(\dfrac{u_n^2 + ab^2}{a+1}\right)^{1/2}$
donde u_o, a, b son reales fijos, tal que $0 < u_o < b$, $a > 0$.

d. $u_1 = 1, \ u_2 = 2, \ldots, \ u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1}), \ n \geq 3.$

e. $S_1 = \dfrac{1}{1^p}, \ S_2 = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p}, \ldots, S_n = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p}, \ p > 1.$

41. Si $T_o = 1, \ T_{n+1} = \dfrac{2T_n^3 + a}{3T_n^2}$, donde: $a > 0$ probar que:

a. $T_n > 0, \ n \in Z^+$

b. $T_1 \geq T_2 \geq T_3, \ldots \geq T_n > 0.$

c. $T_n^3 \geq a$, n$\in Z^+$

d. $\{T_n\}_{n \geq 1}$, converge.

e. $(\lim\limits_{n \to \infty} T_n)^3 = a$

f. $\lim\limits_{n \to \infty} T_n > 0.$

CAPITULO II

2. SERIES INFINITAS

2.1 Definición.- Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales, entonces a la expresión: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ Se denomina serie infinita de números reales.

A una serie infinita: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, representaremos por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir:

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots}$, donde: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, se denomina (o llaman) términos de la serie y a_n es llamado el **n-ésimo término de la serie.**

Ejemplos.-

1. La serie infinita: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$, es representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

2. La serie infinita: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, es representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$$

3. La serie infinita: $1+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{1.4.7}+\frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}+\ldots$, cuyo n-ésimo término es: $a_n=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.4.7.10\ldots(3n-2)}$ es representado por: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.4.7.10\ldots(3n-2)}$

4. La serie infinita: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots$, cuyo n-ésimo término es: $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, se representa por: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Observación.- De la serie infinita de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ formaremos una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ definida de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A la sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$, se denomina sucesión de sumas parciales de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo s_n la n-ésima suma parcial de la serie.

2.2 Definición.- Consideremos una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y una sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\geq 1}$.

Si el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe, entonces diremos que: la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y converge a s.

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se puede escribir así: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$, al cual llamaremos suma de la serie infinita.

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, carece de suma.

Observación.- Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe, entonces la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n\geq 1}$, es convergente, esto es:

una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Ejemplo.- Hallar la suma de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, en caso de ser convergente.

Solución

El término n-ésimo de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es: $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ (descomponiendo a a_n en fracciones parciales), es decir: $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$, de donde: efectuando operaciones se tiene: A = 1, B = -1

Luego: $$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$a_1=1-\frac{1}{2}$$
$$a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$$
$$a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$s_n=a_1+a_2+...+a_n=1-\frac{1}{n+1}$$

por lo tanto: $s_n=1-\frac{1}{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ existe, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Observación.- Otra manera de hallar la n-ésima suma parcial de una serie infinita, es usando la regla telescópica, es decir:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty}[f(i)-f(i-1)]=f(n)-f(0)}$$

Como $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)} \Rightarrow a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, entonces: $s_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

$s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1})=-\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{i+1}-\dfrac{1}{i})=-(f(n)-f(0))$, donde: $f(i)=\dfrac{1}{i+1}$ $\Rightarrow$

$s_n=-(\dfrac{1}{n+1}-1)=1-\dfrac{1}{n+1}$, es decir: $s_n=1-\dfrac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n=1$ existe,

entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Observación.-

1º A veces necesitamos que la serie infinita comience en el término a_0 ó en el a_2 ó en algún otro término, si k > 0 es entero, escribiremos:

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty}a_n=a_k+a_{k+1}+\dots}$$

En caso de que carezca de importancia, al índice que se le asigne al primer término, se acostumbra con frecuencia escribir $\sum a_n$ para designar una serie infinita.

2º Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-c)$, c constante existe $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe, se deduce que podemos omitir un número finito de términos (entre los primeros) de una serie infinita, sin que se afecta la convergencia ó divergencia de la serie, por supuesto el valor de la suma si existe, quedará afectado.

2.3 Propiedades.-

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\geq 1}$ converge, esto es: $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\left(\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s\right)$ pero,

$a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_n - s_{n-1}\right) = s - s = 0$; luego: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces : la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración

Suponiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (por la propiedad 1), pero esto contradice a la hipótesis. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Nota.- Esta propiedad es muy importante, pues permite, en algunos casos determinar en forma inmediata la divergencia de una serie.

Ejemplo.- La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^3+2}$ es divergente puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+2} = 1 \neq 0$$

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con sumas s_1 y s_2 respectivamente y $c \in R$. Entonces:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge a c s_1 , es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge a $s_1 + s_2$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ converge a $s_1 - s_2$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demostración

Demostraremos **ii.** puesto que **i.**, **iii.** serán similares.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

La n-ésima suma parcial de esta serie es:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

$= s_n + t_n$, donde: s_n y t_n son las n-ésima sumas parciales de:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s_1 + s_2$,

es decir : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = s_1 + s_2$ existe, entonces : $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge y

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s_1 + s_2$.

4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $c \in R$, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ es divergente .

Demostración

Ejercicio para el lector.

5. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es divergente.

Demostración

Suponiendo que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es convergente.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + b_n) - a_n]$ seria convergente por **3iii.**, pero es una contradicción con la hipótesis por tanto: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es divergente.

2.4 Teorema.-

Sea $\{S_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de sumas parciales para una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces: para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists\ N > 0 / |s_R - s_T| < \varepsilon$ siempre que R > N, T >N.

Demostración

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sea s su suma, esto es:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N > 0 / n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon.$$

En particular podemos considerar: $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, por tanto, si R>N y T>N.

$$|s_R - s_T| = |s_R - s + s - s_T| \leq |s_R - s| + |s - s_T|$$

$$|s_R - s_T| \leq |s_R - s| + |s_T - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / R, T > N \Rightarrow |s_R - s_T| < \varepsilon$$

2.5 Series Especiales.-

a. Serie Armónica.- La serie armónica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

La serie armónica es divergente: En efecto $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

$s_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$, entonces: $s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$

Para n > 1 $\Rightarrow$ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

(pues hay n-términos en cada lado de la desigualdad)

Luego $s_{2n}-s_n>\frac{1}{2}$ ... (α) siempre que n > 1, pero por el teorema 2.4., establece que si la serie es convergente $s_{2n}-s_n$ se puede hacer tan pequeño tomando n suficientemente grande, esto es:

Si $\varepsilon=\frac{1}{2},\exists N>0/\left|s_{2n}-s_n\right|<\frac{1}{2}$ siempre que 2n > N, n > N, pero esto contradice a (α), por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

b. Serie Geométrica.- Una serie geométrica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}+...$$

La serie geométrica es convergente cuando r < 1 y es divergente cuando r ≥ 1.
En efecto: La n-ésima suma parcial de ésta serie, está dado por:

$s_n=a(1+r+r^2+...+r^{n-1})$, además se tiene: $1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+...+r^{n-1})$

Luego $s_n = a(1+r+r^2+...+r^{n-1}) = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$. Entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a(\dfrac{1-r^n}{1-r}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-r} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ar^n}{1-r}$,donde: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ar^n}{1-r}$, existe y es cero si $|r| < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$, si $|r| < 1$, entonces: La serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, converge cuando $|r| < 1$, y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$, es decir: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$, $|r| < 1$

Si $|r| \geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ar^n}{1-r}$ no existe, por tanto la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^n$ es divergente, cuando $|r| \geq 1$.

Ejemplos:

1. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{3^n} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{27} + ...$ es una serie geométrica con $r = \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ la serie converge y su suma es: $s = \dfrac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$.

2. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$, se puede escribir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\dfrac{2}{5})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\dfrac{3}{5})^n$, de donde: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\dfrac{2}{5})^n = 1 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25} + ...$, es una serie geométrica convergente, pues $r = \dfrac{2}{5} < 1$ y su suma es: $s = \dfrac{1}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow s = \dfrac{5}{3}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n = 1+\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\ldots$, es una serie geométrica convergente, pues $r=\frac{3}{5}<1$

y su suma es: $s=\dfrac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; s=\frac{5}{2}$, por tanto:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n=\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$, es decir que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$, converge a $\frac{25}{6}$.

3. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}$, diverge. En efecto: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{3})^n=1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\ldots$, es una serie geométrica donde: $r=\frac{4}{3}>1$, luego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}$, es divergente.

4. La serie 0.3 + 0.03 + 0.003 + ... + $\frac{3}{10^n}$ + ... es una serie convergente.

En efecto: La serie 0.3 + 0.03 + 0.003 + ... + $\frac{3}{10^n}$ + ..., se puede escribir como $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots$, donde: $r=\frac{3}{10}<1$, por lo tanto la serie es convergente y su suma es: $s=\dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; s=\frac{1}{3}$

C. **La serie - p.-** La serie - p, tiene la forma:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}=\frac{1}{1^P}+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\ldots+\frac{1}{n^P}+\ldots$,siendo p una constante.

Cuando p > 1, la serie-p, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$, es convergente.

Cuando p < 1, la serie-p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente.

Para el caso cuando p = 1, se tiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente.

Ejemplos.- Determinar la convergencia ó divergencia de las series.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n.n!}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n.n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n.(n-1)!n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$ es una serie-p, donde: p = 2 > 1, que es convergente.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n!}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-1)!}{n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$ es una serie-p, donde: $p = \frac{1}{2} < 1$, que es divergente.

2.6 Series Infinitas de Términos Positivos.-

La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde: $a_n \geq 0$, para todo n = 1,2,..., se llama serie infinita de términos positivos.

En este caso, la sucesión de la sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, , es creciente, ó sea: $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < s_{n+1} < \ldots$

2.7 Teorema (Criterio de Comparación Directa).-

Consideremos la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, entonces:

i. Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, es una serie de términos positivos y es convergente y además $a_n \leq b_n$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es convergente.

ii. Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, es una serie de términos positivos y es divergente y además $a_n \geq b_n$, $\forall$ n > N $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es divergente.

Demostración

i. Se tiene que $a_n \geq b_n$, $\forall$ n > N. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces: $\forall$ n > N; tenemos:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_n, \quad \text{entonces:}$$

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_n \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + b, \quad \text{entonces:} \quad s_n \leq \sum_{k=1}^{N} a_k + b,$$ es decir la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es acotada superiormente y como es una sucesión creciente, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

i. Suponiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces por **i.**, tendremos que: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la cual contradice a la hipótesis, por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos.-

1. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

Solución

$n \geq 1$, se tiene: $1+n^2 \leq n+n^2$, $1+n^2 \leq n(1+n)$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1+n}{1+n^2}$, luego $\frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \geq 1$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica) por lo tanto por el teorema **2.8 ii.** concluimos que: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ es divergente.

2. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

Solución

$\forall\ n \geq 1$, se tiene $n2^n \geq 2^n \Rightarrow \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$.

Luego por la parte **(i)** del teorema **(2.7)**, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ es convergente.

3. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}$

Solución

$\forall\ n \in Z^+$, se cumple $-1 \leq \operatorname{sen}^3(n+1) \leq 1$, sumando 2, $1 \leq 2+\operatorname{sen}^3(n+1) \leq 3$ luego $0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3} \leq \frac{3}{2^n+n^3} \leq \frac{3}{2^n}$, es decir: $0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3} \leq \frac{3}{2^n}$

como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$ concluimos por la parte **2.7 (i)** que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}$ es convergente.

2.8 Teorema (Criterio de Comparación por Límite).-

Consideremos las series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos. Entonces:

i. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0 \Rightarrow$ ambas series convergen ó divergen.

ii. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

iii. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es divergente.

Ejemplos.-

1. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{1}{n^n}$, tomemos $b_n = \dfrac{1}{2^n}$, es decir:

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente $\left(r = \dfrac{1}{2} < 1\right)$.

$$\text{Entonces : } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 0$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ es convergente.

por lo tanto por la parte **(ii)** del teorema **2.8** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$, es convergente.

2. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{n^2}{4n^3+1}$, tomemos $b_n = \frac{1}{n}$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ una serie divergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4n^3+1} = \frac{1}{4} > 0,$$ luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es divergente, por lo tanto por la parte **(i)** del teorema **2.8.** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$, es divergente.

3. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$ converge ó diverge.

Solución

Como $a_n = \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$, tomemos $b_n = \frac{1}{n}$ es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ una serie divergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(\frac{1}{n}) = 1 > 0.$$ Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente por lo tanto por la parte **(i)** del teorema **2.8** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$, es divergente.

2.9 Teorema (Criterio de la Razón ó Criterio de DÁLEMBERT).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita con $a_n \geq 0$, $\forall$ n (de términos positivos) y convengamos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = k$, entonces:

i. Si k < 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii. Si k > 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente ó cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = +\infty$

iii. Si k = 1, no se puede determinar nada.

Ejemplos:

1. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = n2^{-n} = \frac{n}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, calculando el limite se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Luego por la parte **(i)** del teorema **(2.9)**, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$, es convergente.

2. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{e^n} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{(n+1)^3+1}}{e^{n+1}}$. Entonces:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt{\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}} = \frac{1}{e} < 1$$

Luego por la parte **i.** del teorema **(2.9)** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$, es convergente.

3. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = 1$. Luego por la parte **iii.** del teorema **(2.9)** no se concluye nada. Ahora aplicaremos el criterio de comparación por límites como $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, tomamos $b_n = \dfrac{1}{n}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es una serie divergente, entonces: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 > 0$. Luego por la parte **i.** del teorema **(2.8)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, es divergente.

2.10 Teorema (Criterio de la Integral).-

Sea f una función definida y positiva para todo $x > 1$ y además decreciente y que $f(n) = a_n$, $\forall n \in Z^+$. Entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si y solo si, la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente y si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es divergente, entonces : la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración

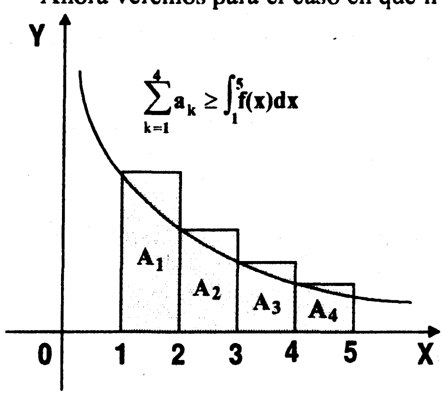
Sea $k \in Z^+$, por el teorema del valor medio para las integrales $\exists \ \varepsilon / \int_k^{k+1} f(x)dx = 1.f(\varepsilon)$ donde: $k < \varepsilon < k + 1$, como f es decreciente se tiene:

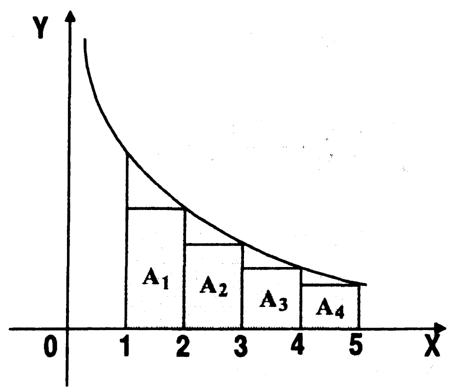
$a_k = f(k) \geq f(\varepsilon) \geq f(k+1) = a_{k+1}$, entonces: $a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq a_{k+1}$.

Luego $\forall n \in Z^+$ $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$, de donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1$$

Ahora veremos para el caso en que n = 4.





Luego por el criterio de comparación las expresiones

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$ son convergentes ó divergentes simultáneamente.

Ejemplos:

1. Demostrar que la serie-p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, es convergente si $p > 1$ y es divergente si $p \leq 1$.

Demostración

Como $a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}$, entonces:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} -\left[\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} - \frac{1}{p-1}\right] = \frac{1}{p-1}, \quad \text{si } p > 1$$

Entonces la serie -p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente , si $p > 1$; y es divergente para $p \leq 1$, para el caso en que $p = 1$, se obtiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que es divergente.

2. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$, es convergente o divergente.

<u>Solución</u>

Como $a_n = n e^{-n} = f(n) \Rightarrow f(x) = x e^{-x}$, además $f(x) \geq 0$ para $x > 1$ y f es decreciente en $[1, +\infty>$

Luego $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(-x e^{-x} - e^{-x}\right)\Big/_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(be^{-b} - e^{-b}\right) - 2e^{-1}\right] = 2e^{-1}$$

por tanto $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ es convergente. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ es convergente.

3. Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{1}{n\ln(n)} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ para x > 2, además,

$f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} < 0$, para x > 2 . Luego f es decreciente en [2, +∞>, por tanto: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big/_2^b = \lim_{b\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(b)}{2}\right) = \infty$

entonces se tiene que $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ es divergente. Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$, es divergente.

2.11 Teorema (Criterio de la Raíz ó Criterio de Cauchy).-

Si en la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de términos positivos, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$, entonces:

i. Si k < 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii. Si k > 1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii. Si k = 1, no se puede determinar nada.

Ejemplos:

1. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^n$ y de acuerdo al criterio de la raíz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n+1}{2n-1})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Luego la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$, es convergente de acuerdo a la parte **i.** del teorema **(2.11)**

2. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$

Solución

Como $a_n = (n^{1/n}-1)^n$ y de acuerdo al criterio de la raíz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n^{1/n}-1)^n} = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n}-1) = 1-1 = 0 < 1$$

Luego por la parte **i.** del teorema **(2.11)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$, es convergente.

3. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n = \dfrac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ y de acuerdo al criterio de la raiz se tiene:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} n^{3/n}\,\frac{\sqrt{2}+2}{3} = \frac{\sqrt{2}+2}{3} > 1$$

Luego por la parte **ii.** del teorema **2.11** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$,es divergente.

Observación.- El criterio de comparación, es un criterio de convergencia para series con términos positivos, sin embargo se puede usar para probar la convergencia de otras series.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es una serie cualquiera de números reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, es una serie de términos positivos y por tanto el criterio de comparación puede aplicarse a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2.12 Series infinitas de términos positivos y negativos.-

Una serie infinita de la forma siguientes:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$, donde: $a_n > 0$, $\forall n \in Z^+$, se denomina serie alternada.

También las series de la forma: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$, donde: $a_n > 0$, son series alternadas.

2.13 Teorema (Criterio de Leibniz).-

La serie alternada de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots,$$ es convergente si se cumple:

i. $0 < a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\in Z^+$, ii. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplos: Determinar si la serie alternada dada es convergente ó divergente.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, además $\forall$ n $\in Z^+$, n < n + 1 $\Rightarrow$

ln (n) < ln (n+ 1) $\Rightarrow \dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln(n)}$, para n $\geq$ 2 es decir: $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\geq$ 2

y además: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0.$

Luego por el criterio de Leibniz, la serie alternada: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$, es convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, entonces: $\forall$ n $\in Z^+$, $2^n < 2^{n+1}$, de donde:

$\dfrac{1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2^n}$, $\forall$ n $\geq$ 1, es decir: $a_{n+1} < a_n$, además $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Luego por el criterio de Leibniz, la serie alternada: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$, es convergente.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$

<u>Solución</u>

Como $a_n=\frac{n}{3n-1}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{n+1}{3n+2}$, $\forall$ n $\in Z^+$, 2n - 1 < 2n , sumando $3n^2$

$3n^2+2n-1<3n^2+2n$, (n + 1)(3n - 1) < n(3n + 2)

$\frac{n+1}{3n+2}<\frac{n}{3n-1}$ es decir: $a_{n+1}<a_n$, $\forall$ n $\in Z^+$, además:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$. Luego de acuerdo al criterio de Leibniz, la serie alternada: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$ es divergente.

Notación.- A la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, abreviaremos escribiendo $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,

donde: $u_n=(-1)^{n+1}a_n \quad \wedge \quad |u_n|=a_n$

2.14 Teorema.-

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ es convergente, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ es convergente.

Demostración

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ es convergente (por hipótesis).

Luego por la propiedad de valor absoluto se tiene: $-|u_n| \le u_n \le |u_n|$, es decir: $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$, de donde: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$, es una serie de términos positivos.

Luego $u_n + |u_n| \le 2|u_n|$, $\forall$ n > N y además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ es convergente, entonces: por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$, es convergente pero $\sum_{n=1}^{n} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}((u_n + |u_n|) - |u_n|)$, es convergente (suma de series de convergentes).

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, es convergente.

2.15 Definición.- Se dice que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente.

2.16 Definición.- Una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ que es convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es condicionalmente convergente.

Observación.- El teorema **2.14** establece que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Sin embargo una serie convergente puede no ser absolutamente convergente.

Sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ converge } \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ converge.}$$

Ejemplos:

1. La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, es una serie convergente, sin embargo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, no es convergente.

2. La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{2^n}$, es absolutamente convergente, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{3}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$, es una serie geométrica con razón $r=\frac{1}{2}<1$. Luego la serie es convergente y por lo tanto: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{2^n}$ es convergente.

Observación.- Para determinar la convergencia o la divergencia de las series alternadas, se usa el criterio de la razón.

2.17 Teorema (Criterio de la razón para Series Alternantes).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ una serie alternante, tal que $u_n \neq 0$, $\forall$n. Entonces:

i. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto es convergente.

ii. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k > 1$ ó $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, es divergente.

iii. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, no se puede determinar nada, acerca de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Demostración

i. Sea r un número, tal que: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < r < 1$, es decir k < r < 1, entonces como: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k$, existe un número N > 0, suficientemente grande, tal que: $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < r$, ∀n > N, se tendrá que: $|u_{N+1}| < r|u_N|$; $|u_{N+2}| < r|u_{N+1}|$; $|u_{N+3}| < r|u_{N+2}|$, etc., o lo que es lo mismo ,

$$|u_{N+1}| < r|u_N|$$
$$|u_{N+2}| < r|u_{N+1}| < r^2|u_N|$$
$$|u_{N+3}| < r|u_{N+2}| < r^3|u_N|$$
$$\vdots$$
$$|u_{N+P}| < r^P|u_N|,\ \forall\ p \in z^+$$

Luego la serie $\sum_{P=1}^{\infty} r^P|u_n|$ es convergente, pues r < 1 entonces: la serie $\sum_{P=1}^{\infty}|u_{N+P}|$, es convergente, y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente.

II. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ ó $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces: existe un número $N > 0$, tal que: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, siempre que $n > N$, es decir: $|u_{N+1}| > |u_N|$, siempre que $n > N$.

Luego $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión creciente de términos positivos $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Luego concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente.

Ejemplos:

1. Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$, es convergente ó divergente ó condicionalmente convergente.

<u>Solución</u>

Como $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = (-1)^{n+2}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

$$k = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}3^{n+1}n!}{(-1)^n 3^n (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

como $k < 1$, de acuerdo a la parte (i) del teorema (2.17) la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$ es convergente.

2. Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$, es convergente ó divergente ó condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = (-1)^n \dfrac{n!}{2^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}$.

Luego $k = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}\, n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$.

Por lo tanto de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **(2.17)** concluimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{2^{n+1}}$ es divergente.

2.18 Teorema (Criterio de RAABE).-

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita de términos positivos, si $k = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ entonces:

i. k > 1, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii. k < 1, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii. k = 1, nada se puede afirmar de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplos:

1. Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

De la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, se tiene: $a_n=\frac{1}{n^2+1}$ de donde: $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+1}$, de acuerdo al teorema **(2.18)** se tiene:

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}\right),\quad k=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+2}\right)=2>1.$$

Luego de acuerdo a la parte **(i)** del teorema **(2.8)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, es convergente.

2. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

En la serie dada se tiene que:

$$a_n=\frac{n^2-1}{2n^2+1}\quad \text{de donde:}\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)^2+1}=\frac{n^2+2n}{2n^2+4n+3}.$$

Aplicando el teorema **(2.18)** se tiene:

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{n^2+2n}{2n^2+4n+3}}{\frac{n^2-1}{2n^2+1}}\right)$$

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(n^2+2n)(2n^2+1)}{(n^2-1)(2n^2+4n+3)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-6n-3)}{(n^2-1)(2n^2+4n+3)}=0<1$$

Luego de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **(2.18)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$, es divergente.

3. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$ es convergente ó divergente.

Solución

En la serie dada se tiene que: $a_n=\frac{a}{(2n+1)(2n-1)} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{a}{(2n+3)(2n+1)}$,

Luego por el criterio del teorema **2.18** se tiene:

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n+3)(2n+1)}\right)$$

$$k=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{8n+4}{4n^2+3n+3}\right)=2>1$$

Luego de acuerdo a la parte **(ii)** del teorema **(2.18)** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$, es convergente.

4. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n=\frac{n-1}{2n^2+1} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)^2+1}$, luego por el criterio del teorema **(2.18)** se tiene: $k=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n^3+n}{2n^3+2n^2-n-3}\right)=1$.

Luego de acuerdo a la parte **(iii)** del teorema **(2.18)**, no se concluye nada y por lo tanto la convergencia se determina por uno de los criterios determinados.

Observación.- Como en muchos casos, las series son decrecientes, entonces: aqui se puede utilizar el siguiente teorema de Cauchy.

2.19 Teorema.- Si $a_{n+1} \le a_n$, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si y solo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente.

Ejemplos:

1. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

<u>**Solución**</u>

Como $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{2^n} = \frac{1}{2^n}$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$, es convergente ó divergente si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente ó divergente, pero $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, esta serie es divergente.

2. Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, es convergente ó divergente.

<u>**Solución**</u>

$$a_n = \frac{1}{n\ln(n)} \Rightarrow a_{2^n} = \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{2^n n \ln 2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n . \frac{1}{2^n n \ln 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$$

De acuerdo al ejemplo anterior es divergente por lo tanto por el teorema **(2.19)**, se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, es divergente.

2.20 Ejercicios Desarrollados.-

1. Hallar la suma de la serie, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ en caso de ser convergente.

Solución

El término n-ésimo de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ es $a_n=\frac{1}{n(n+3)}$, ahora descomponemos a_n en fracciones parciales es decir: $a_n=\frac{1}{n(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}$, de donde: efectuando operaciones se tiene: 1 = (A + B)n + 3A (por igualdad).

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{matrix}. \qquad \text{Luego } a_n=\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}]$$

$$a_1=\frac{1}{3}[1-\frac{1}{4}]$$

$$a_2=\frac{1}{3}[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}]$$

$$a_3=\frac{1}{3}[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}]$$

$$a_4=\frac{1}{3}[\frac{1}{4}-\frac{1}{7}]$$

$$a_5=\frac{1}{3}[\frac{1}{5}-\frac{1}{8}]$$

.
.
.

$$a_{n-4}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$a_{n-3}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right]$$

$$a_{n-2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$a_{n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$$

______________________________ . Sumando:

$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$s_n=\frac{1}{3}\left[\frac{11}{6}-\frac{3n^2+12n+11}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\frac{11}{18}$ entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$, es convergente y su suma es igual a $\frac{11}{18}$, es decir: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}=\frac{11}{18}$.

2. La siguiente serie es convergente, calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

Solución

Aplicando la identidad siguiente:

$$\operatorname{sen} A.\cos.B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos(\frac{2n+1}{n^2+n})\operatorname{sen}(\frac{1}{n^2+n}) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\frac{2n+2}{n^2+n}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{n^2+n} - \frac{2n+1}{n^2+n})]$$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\frac{2n+1}{n(n+1)}) + \operatorname{sen}(\frac{-2n}{n(n+1)})] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\frac{2}{n}) - \operatorname{sen}(\frac{2}{n+1})]$$

$$a_n = \cos(\frac{2n+1}{n^2+n})\operatorname{sen}(\frac{1}{n^2+n}) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\frac{2n}{n}) - \operatorname{sen}(\frac{2}{n+1})]$$

Como $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.. entonces:

$$s_n = \frac{1}{2}[(\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 1) + (\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}\frac{2}{3}) + (\operatorname{sen}\frac{2}{3} - \operatorname{sen}\frac{2}{4}) + ...$$

$$+ (\operatorname{sen}\frac{2}{n-1} - \operatorname{sen}\frac{2}{n}) + (\operatorname{sen}\frac{2}{n} - \operatorname{sen}\frac{2}{n+1})]$$

$$s_n = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen}\frac{2}{n+1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\operatorname{sen} 2}{2}.$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{2n+1}{n^2+n})\operatorname{sen}(\frac{1}{n^2+n}) = \frac{\operatorname{sen} 2}{2}$

3. La siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, es convergente. Calcular su suma.

Solución

Como $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, expresaremos en una suma de fracciones en la forma:

$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+5}$, de donde: al efectuar operaciones se tiene:

$$1=(2A+2B)n+5A-B \quad \text{(por identidad)} \begin{cases} 2A+2B=0 \\ 5A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{6} \\ B=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right]$$

$$a_1=\frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{7}\right]$$

$$a_2=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right]$$

$$a_3=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right]$$

$$a_4=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right]$$

$$\vdots$$

$$a_{n-4}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-9}-\frac{1}{2n-3}\right]$$

$$a_{n-3}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$a_{n-2}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right]$$

______________________________, sumando

$$s_n=\frac{1}{6}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}\right)\right]$$

$$s_n = \frac{23}{90} - \frac{12n^2+36n+23}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{23}{90} \qquad \text{entonces : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{23}{90}$$

4. Hallar la suma de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)})$

Solución

Al término n-ésimo de esta serie expresaremos en la forma:

$$a_n = \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)}) = \operatorname{arctg}(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}}), \text{ donde : } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{n} \;,\; \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{n+1}.$$

Luego se tiene: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{1+n(n+1)}$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{1+n(n+1)} \Rightarrow \alpha-\beta = \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)})$$

de donde : $a_n = \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)}) = \alpha - \beta = \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{n+1})$.

Ahora calculamos la sucesión de las sumas parciales:

$$s_n = -\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{arctg}(\frac{1}{i+1}) - \operatorname{arctg}\frac{1}{i}) = -(\operatorname{arctg}(\frac{1}{n+1}) - \operatorname{arctg}(1))$$

(esto es por la regla Telescópica).

$$s_n = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)}) = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+n(n+1)}) = \frac{\pi}{4}$$

5. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)(n+15)}$

Solución

Como $a_n = \frac{n}{(4n-1)(n+15)} \approx \frac{1}{n} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie divergente

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(4n-1)(n+15)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ por la parte **(i)** del teorema **(2.8)** se tiene

que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)(n+15)}$ es divergente.

6. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$; si converge hallar su suma.

Solución

Primeramente calcularemos la integral $\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$

$\int e^{-\sqrt{x}} dx = \int e^{-u} 2udu = 2\int ue^{-u} du$ (integrando por partes)

$$\int e^{-\sqrt{x}}dx = -2(ue^{-u} + e^{-u}) = 2(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$$

$$\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx = -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)\,/_n^{n+1} = -2[e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx = -2\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)]$$

Ahora calcularemos la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, la sucesión de las sumas parciales mediante la regla Telescópica.

$$s_n = -2\sum_{i=1}^{n}(f(i) - f(i-1)) = -2(f(n) - f(0)),\ \text{donde:}$$

$$f(i) = e^{-\sqrt{i+1}}(\sqrt{i+1}+1) \Rightarrow f(i-1) = e^{-\sqrt{i}}(\sqrt{i}+1)$$

$$s_n = -2\sum_{i=1}^{n}[e^{-\sqrt{i+1}}(\sqrt{i+1}+1) - e^{-\sqrt{i}}(\sqrt{i}+1)] = -2[e^{-\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+1) - e^{-1}2].$$

De donde: $s_n = 4e^{-1} - \dfrac{2(\sqrt{n+1}+1)}{e^{\sqrt{n+1}}}$, como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 4e^{-1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$, es convergente y su suma es: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx = 4e^{-1}$.

7. Analizar la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$

Solución

Como $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}} = \dfrac{1}{n.n^{1/n}} \approx \dfrac{1}{n} = b_n$, entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ es una serie divergente (serie armónica), $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1/n}} = 1 > 0$, y de acuerdo a la parte **(i)** del teorema **2.8** resulta que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$, es divergente.

8. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \le \frac{1}{n^2}$, $\forall$ n $\ge$ 1 y además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es convergente.

9. Determinar que la convergencia ó divergencia de la serie infinita $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Solución

Se sabe que, $\forall$ n $\ge$ 2, se cumple Ln(n) < n de donde $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ y como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente entonces por la parte **(ii)** del teorema **2.7** se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$, es divergente.

10. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^3}$

Solución

$\forall$ n $\ge$ 1, se cumple $\sqrt{n}+3 \le 4\sqrt{n}$, ahora multiplicamos por $\frac{1}{n^3}$ se tiene: $\frac{\sqrt{n}+3}{n^3} \le \frac{4\sqrt{n}}{n^3} = \frac{4}{n^{5/3}}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{5/3}}$ es convergente, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7** se concluye que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^3}$ es convergente.

11. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\text{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}$

Solución

$\forall$ n $\in Z^+$, se cumple $-1\le \text{sen}^3(n+1)\le 1$

$$1\le 2+\text{sen}^3(n+1)\le 3$$

$$0\le \frac{2+\text{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}\le \frac{3}{2^n+n^3}\le \frac{3}{2^n}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ es convergente (serie geométrica $r=\frac{1}{2}<1$), entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\text{sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}$, es convergente.

12. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(9^{-n}+16^{-n}+2.12^{-n})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{9})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{16})^n+2(-\frac{1}{12})^n$$

sus series geométricas son convergentes puesto que $|r|<1$, por lo tanto; la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2$ es convergente, además su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})^2=\frac{-1/9}{1-(-1/9)}+\frac{-1/16}{1-(-1/16)}+\frac{-1/12}{1-(-1/12)}$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{17} - \frac{1}{13} = -\frac{691}{2210}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{-n} + 4^{-n})^2 = -\frac{691}{2210}$$

13. Analizar la convergencia ó la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{6-3n}.5^{4-2n})$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{6-3n}.5^{4-2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^6.e^{-3n}.5^4.5^{-2n}$$

$$= 625e^6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{-3}.5^{-2})^n = 625e^6 \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{25e^3})^n$$

Se tiene una serie geométrica donde $r = \frac{1}{25e^3} < 1$, y por lo tanto; la serie es convergente donde su suma es dado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{6-3n}.5^{4-2n}) = 625e^6 (\frac{-\frac{1}{25e^3}}{1 + \frac{1}{25e^3}}) = \frac{-625e^6}{25e^3 + 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{6-3n}.5^{4-2n}) = -\frac{625e^6}{25e^3 + 1}$$

14. Determinar la convergencia de: 0.535353...

Solución

Sea A = 0.535353... , se puede escribir:

A = 0.53 + 0.0053 + 0.000053 + ...

$$= \frac{53}{100} + \frac{53}{100^2} + \frac{53}{100^3} + \ldots,$$ de donde : $r = \frac{1}{100} < 1$; por lo tanto la serie es

convergente y su suma es: $$S = \frac{53(\frac{1}{100})}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{53}{99}$$

15. Determinar la convergencia de 0.012012012...

Solución

Sea A = 0.012012012... , se puede escribir:

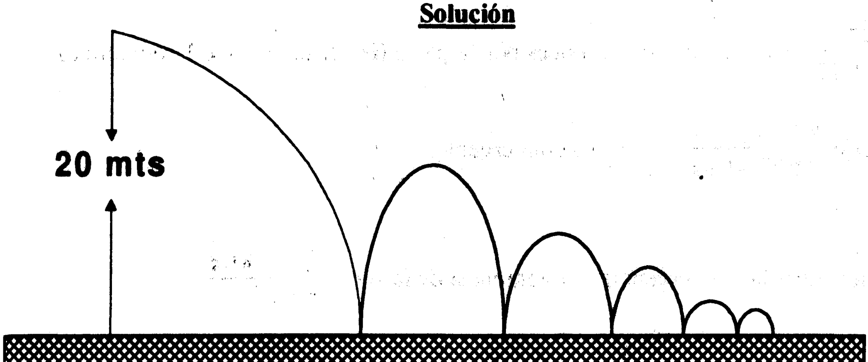
$$A = 0.012 + 0.000012 + 0.00000012 + \ldots$$

$$= \frac{12}{1000} + \frac{12}{1000^2} + \frac{12}{1000^3} + \ldots,$$ de donde $r = \frac{1}{1000} < 1$; por lo tanto la serie es

convergente y su suma es: $$S = \frac{12(\frac{1}{1000})}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{12}{999} = \frac{4}{333} \qquad \therefore \quad S = \frac{4}{333}$$

16. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 mts. cada vez que toca el suelo rebota hasta $\frac{3}{4}$ de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota antes de llegar a reposo.

Solución



La distancia que recorre la pelota representaremos mediante la serie infinita.

$$20+2(\frac{3}{4})(20)+2(\frac{3}{4})^2(20)+...+2(\frac{3}{4})^n 20+...$$

La serie geométrica es convergente y su suma es:

$$20+40(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}})=20+40(3)=140 \text{ mts}$$

17. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+\operatorname{sen}^2(n^3)}$

Solución

$\forall$ n ≥ 1, se cumple que: $0\leq \operatorname{sen}^2(n^3)\leq 1$, entonces:

$2^n-1\leq 2^n-1+\operatorname{sen}^2(n^3)\leq 2^n$, por lo tanto.

$0\leq 2^n-1+\operatorname{sen}^2(n^3)\leq 2^n$, $\forall$ n $\geq$ 1, entonces:

$$0\leq \frac{1}{2^n-1+\operatorname{sen}^2(n^3)}\leq \frac{c}{2^n},\ c>1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2^n}$ es convergente, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.7** concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+\operatorname{sen}^2(n^3)}$ es convergente.

18. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2+1}$

Solución

Como $a_n = \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Como $\frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es convergente entonces por la parte **(i)** del teorema **(2.7).** Se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2+1}$ es convergente.

19. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

Solución

Como $a_n = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \approx \frac{1}{n^2}$, tomamos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie geométrica.

Aplicando el teorema **2.8** se tiene: $k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 > 0$,

entonces, por la parte **(i)** del teorema **2.8** se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ es convergente.

20. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Solución

Como $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \approx \frac{1}{n}$, entonces tomo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es una serie divergente entonces por la parte **(ii)** del teorema **2.8**, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n+1}} = +\infty$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ es una serie divergente.

21. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{2^n}$.

Solución

Como $a_n=\frac{\ln(n)}{2^n}$, tomemos $b_n=\frac{1}{n^2}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, es una serie convergente, entonces, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln(n)}{2^n}=0<1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente entonces por la parte (i) del teorema 2.8 se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{2^n}$ es convergente.

22. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2+2}$

Solución

Como $a_n=\frac{\ln(n)}{n^2+2}$, tomemos $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente.

Ahora aplicamos el teorema 2.8 es decir: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\ln(n)}{n^2+2}=0<1$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2+2}$ es convergente.

23. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n=\frac{10^{2n}}{(2n-1)!}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{10^{2n+2}}{(2n+1)!}$

Ahora aplicando el criterio de la razón se tiene:

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^{2n+2}.(2n-1)!}{10^{2n}.(2n+1)!} = 100 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$, de donde por la parte **(i)** del teorema **2.9** se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$ es convergente.

24. Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ es convergente ó divergente.

Solución

Como $a_n = \frac{3^n n!}{n^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, ahora aplicando el criterio de la razón:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{3^n n!(n+1)^{n+1}} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$$

Luego por la parte **(ii)** del teorema **2.9** se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ es divergente.

25. Determinar si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1.3.5\ldots(2n+1)}$. Aplicando el criterio de la razón se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, entonces por la parte **(i)** del teorema **2.9** se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$ es convergente.

26. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$, es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n=\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}=f(n)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{\ln(x+1)}\Big/_1^b$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(b+1)}-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\left(0-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore\quad\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\frac{1}{\ln 2},\quad \text{es convergente}$$

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$, es convergente.

27. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$ es convergente ó divergente.

Solución

Sea $a_n=\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}=f(n)\Rightarrow f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}$ entonces:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}\Big/_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}^2(b)}{2}-\frac{\operatorname{arctg}^2(1)}{2}\right)\qquad=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{32}=\frac{3\pi^2}{32},$$ entonces la integral impropia es convergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$, es convergente.

28. Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n)]^{\ln(n)}}$ es convergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{1}{[\ln(n)]^{\ln(n)}} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}}$,

entonces $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{e^y dy}{y^y}$, de donde: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$.

Ahora consideremos la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^n}{n}$ es convergente, por el criterio de la razón:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, la serie es convergente, luego por el criterio de la integral

$\int_2^{+\infty}\frac{e^y}{y^y}dy$, es convergente y como: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}} = \int_2^{\infty}\frac{e^y}{y^y}dy$, se tiene que:

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}$ es convergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ es convergente.

29. Pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^p$, converge para p > 2 y diverge para $p \le 2$.

Solución

Aplicaremos el criterio de la razón:

Sea $a_n = \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^p \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\right)^p$

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p = 1 \text{ , no hay información.}$$

Ahora aplicaremos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2p\left(\frac{n}{2n+2}\right)^2 \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{p-1} = \frac{p}{2}$$

y de acuerdo al criterio de Raabe se dice que:

Si $\frac{p}{2} > 1 \Rightarrow p > 2 \Rightarrow$ la serie converge , si $p > 2$

y si $\frac{p}{2} \le 1 \Rightarrow p \le 2 \Rightarrow$ la serie diverge , si $p \le 2$.

30. Verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}\right)$, converge.

Solución

Sea $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}\right) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}} \approx \dfrac{\sqrt{n}}{n^3} \approx \dfrac{1}{n^{5/2}}$.

Luego $b_n = \dfrac{1}{n^{5/2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5/2}}$ es una serie convergente, ahora aplicamos el criterio de comparación por límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{n^{5/2}}\left(\sqrt{n^6+2}+\sqrt{n^6+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^6}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = \frac{1}{2} > 0$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^6+2}-\sqrt{n^6+1})$ es convergente.

31. Estudiar la serie $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+...+...$

Solución

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+...+...=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}.$$

Sea $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, f es continua $\forall$ x $\geq$ 2, aplicando el criterio de la integral

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big/_{2}^{+\infty} = \ln(\ln(+\infty)) - \ln(\ln 2) = +\infty, \text{ entonces}$$

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ es divergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ es divergente.

32. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})\text{sen}[(\frac{n+1}{n})\pi]$

Solución

$$a_n = (\frac{1}{n})\text{sen}(\frac{n+1}{n})\pi = \frac{1}{n}\text{sen}(\pi+\frac{\pi}{n}) = -\frac{1}{n}\text{sen}\frac{\pi}{n}$$

Para analizar la convergencia ó divergencia de la serie usamos el criterio de comparación por límites, es decir:

Sea $b_n = -\frac{\pi}{n^2}$ de donde: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\pi}{n^2}$ es convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{-\frac{\pi}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 1 > 0$$ y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})\operatorname{sen}(\frac{n+1}{n}\pi)$ es convergente.

33. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n$

Solución

Sea $a_n = n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n$, aplicando el criterio de la raíz tenemos

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n}$$

$$k = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 (\frac{5}{9} + \frac{(-2)^n}{9}) = \frac{5}{9} \pm \infty$$ (oscila), entonces se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\frac{5+(-2)^n}{9})^n \text{ es divergente.}$$

34. Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 (n+2)^2}$, y si converge calcular su suma.

Solución

Sea $a_n = \frac{n+1}{n^2 (n+2)^2} \approx \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ sea $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)}{n^2(n+2)^2}=1>0,$$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, es convergente

entonces por la parte (i) del teorema 2.8 se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+1)^2}$ es convergente.

Ahora hallamos su suma.

$$a_n=\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{4n+4}{4n^2(n+2)^2}=\frac{(n^2+4n+4)-n^2}{4n^2(n+2)^2}$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Calculamos la sucesión de las sumas parciales, para esto aplicamos la segunda regla telescópica.

$$s_n=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(i+2)^2}-\frac{1}{i}\right)=-\frac{1}{4}[f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)],$$ donde:

$$f(i-1)=\frac{1}{(i+2)^2}\Rightarrow f(i)=\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$f(n+1)=\frac{1}{(n+2)^2}\Rightarrow f(n)=\frac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow f(1)=\frac{1}{4}\Rightarrow f(0)=1$$

$$s_n=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{4}-1\right]=\frac{5}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{16}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{5}{16}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{16}$$

35. Estudiar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n}$

Solución

Como $\sqrt{3}+(-1)^n=\sqrt{3}\mp 1 \Rightarrow \sqrt{3}+(-1)^n \le \sqrt{3}+1$, $\forall$ n $\in Z^+$

$$\Rightarrow [\sqrt{3}+(-1)^n]^n \le (\sqrt{3}+1)^n \Rightarrow \frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n} \le \frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n},$$

es decir: $\frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n} \le \frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$, $\forall$ n $\in Z^+$

Ahora analizaremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$, por el criterio de la raíz, es decir:

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}}=\frac{\sqrt{3}+1}{6}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{200}=\frac{\sqrt{3}+1}{6}.$$

Como $k=\frac{\sqrt{3}+1}{6}<1$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}(\sqrt{3}+1)^n}{6^n}$, es convergente, luego por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n}{6^n}$, es convergente.

36. Determinar si la serie: $\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2+(\frac{3}{8})^3+....+(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}+......$, es convergente ó divergente.

Solución

La serie dada se puede escribir en la forma:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$ donde $a_n=(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$, ahora aplicamos el criterio de la raíz:

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{3n-1})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{3n-1})^n$ es convergente.

37. Calcular la suma de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+2}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}\left[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}\right]}$$

Solución

Para calcular la suma de la serie, tratamos de simplificar el n-ésimo término de la serie, esto es:

$$a_n = \frac{3n^2+5n+2}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}\left[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}\right]}$$

$$= \frac{(3n^2+5n+2)\left[(n+1)\sqrt{n+2}-n\sqrt{n+1}\right]}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}\left[(n+1)^2(n+2)-n^2(n+1)\right]}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+2)}{(n+1)(3n+2)}\left(\frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}\right)$$

Ahora calculamos la sucesión de las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i\sqrt{i+1}} - \frac{1}{(i+1)\sqrt{i+2}}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(i+1)\sqrt{i+2}} - \frac{1}{i\sqrt{i+1}}\right)$$

$$= -(f(n) - f(0)) = -(\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n^2+3n+2}[(n+1)\sqrt{n+2}+n\sqrt{n+1}]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

38. Estudiar la serie y en caso de convergencia calcular su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$.

Solución

Primeramente analizaremos si la serie es convergente y para esto aplicaremos el criterio de comparación por limites.

Sea $a_n = \ln(1+\frac{1}{n(n+2)}) \approx \frac{1}{n(n+2)} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$, que es una serie convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})}{\frac{1}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} n(n+2)\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n(n+2)} = \ln e = 1 > 0$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$ es una serie convergente.

Ahora calculamos su suma: $a_n = \ln(1+\frac{1}{n(n+2)}) = \ln\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \ln(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})$

$$a_n = \ln(n+1)^2 - \ln(n) - \ln(n(n+2))$$

$$a_n = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$$

ahora calculamos el término n-ésimo de la sucesión de las sumas parciales. Es decir $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

$$a_1 = 2\ln 2 - \ln 1 - \ln 3$$
$$a_2 = 2\ln 3 - \ln 2 - \ln 4$$
$$a_3 = 2\ln 4 - \ln 3 - \ln 5$$
$$a_4 = 2\ln 5 - \ln 4 - \ln 6$$
$$a_5 = 2\ln 6 - \ln 5 - \ln 7$$
$$\vdots$$
$$a_{n-3} = 2\ln(n-2) - \ln(n-3) - \ln(n-1)$$

$$a_{n-2} = 2\ln(n-1) - \ln(n-2) - \ln(n)$$

$$a_{n-1} = 2\ \ln.n - \ln(n-1) - \ln(n+1)$$

$$a_n = 2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2)$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

$$s_n = \ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \quad \text{de donde:} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \ln 2$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \ln 2$$

39. Estudiar la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n}$

Solución

$\forall\ n \in Z^+,\ 2+(-1)^n \le 3 \ \Rightarrow\ (2+(-1)^n)^n \le 3^n$

$$\Rightarrow \frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n} \le \frac{3^n.n^{600}}{9^n} = n^{600}(\frac{1}{3})^n$$

Ahora analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{600}}{3^n}$, por el criterio de la raíz.

$k = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{600}}{3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{600} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{600}}{3^n}$ es convergente, y por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{600}(2+(-1)^n)^n}{9^n}$, es también convergente.

40. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}}$ y si converge halle la suma.

Solución

A la serie dada expresaremos así: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Como $n+1>n \Rightarrow n(n+1)>n^2 \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in Z^+$.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ es convergente por ser serie geométrica con $r=\frac{1}{2}<1$, como la suma de las series son convergentes, entonces la serie dada es convergente.

Ahora calculamos la suma de cada una de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = -\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})$$

Sea $s_n = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}) = -(f(n)-f(0) = -(\frac{1}{n+1}-1)$

$$s_n = 1+-\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \text{ de donde: } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Además sabemos que : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2}) = 1$.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1) = 1$, por lo tanto: $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}} = 1$.

41. ¿Para qué valores de "s" converge y para cuales diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}\right]^S$?, justificando con los criterios ya conocidos.

Solución

Para determinar los valores de s para la convergencia o divergencia, aplicaremos el criterio de la razón.

$$a_n = [\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}]^S \Rightarrow a_{n+1} = [\frac{1.3.5.7...(2n+1)}{2.4.6.8...(2n+2)}]^S$$

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[\frac{1.3.5.7...(2n+1)}{2.4.6.8...(2n)}]^S}{[\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...(2n)}]^S} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n+2})^S = 1^S = 1 \Rightarrow k = 1,$$

entonces no podemos afirmar nada, en este caso aplicamos el criterio de RAABE, para lo cual hacemos.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow (\frac{2n+1}{2n+2})^S = \frac{1}{\alpha+1}, \text{ entonces:}$$

$$\alpha(2n+1)^S + (2n+1)^S = (2n+2)^S \Rightarrow \alpha = (\frac{2n+2}{2n+1})^S - 1$$

$$n\alpha = n\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{s} - n$$

$$n\alpha = n\left[1+s\left(\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{s(s-1)}{2!}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^s}\right]-n$$

$$n\alpha = n+s\frac{n}{2n+1}+\frac{s(s-1)}{2!}\cdot\frac{n}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)^s}-n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n\alpha)=\frac{s}{2}$, la serie converge si $\frac{s}{2}>1 \Rightarrow s>2$ y diverge $\frac{s}{2}\le 1 \Rightarrow s\le 2$, por lo tanto la serie dada converge, si $s>2$ y diverge, si $s\le 2$.

42. Analizar la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$, donde "k" es una constante.

Solución

Hacemos $\log n = u \Rightarrow 10^u = n \Rightarrow 10^{u/k} = n^{1/k}$.

Si $k>0 \Rightarrow \frac{u}{k}=\log n^{1/k} \Rightarrow u = k\log n^{1/k}$.

Sabemos que: $\log n < n,\ \forall n\ge 2 \Rightarrow \log n^{1/k} < n^{1/k} \Rightarrow k\log n^{1/k} < kn^{1/k} \Rightarrow u < kn^{1/k} \Rightarrow$

$\log(n) < kn^{1/k} \Rightarrow u < kn^{1/k} < kn^{1/k} \Rightarrow \log(n) < kn^{1/k} \Rightarrow (\log n)^k < k^k n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{k^k n} < \frac{1}{(\log n)^k}$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, entonces: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^k n}$, diverge $\forall$ k > 0.

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k},\ \text{es divergente } \forall\ k>0.$$

43. Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}$, luego

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$ es decir k < 1 y de acuerdo a la parte (i) del criterio de la razón para series alternadas se concluye que la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n}{2^n}$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ es convergente .

44. Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{e^n}{n}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Como $u_n = \dfrac{(-1)^n e^n}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} e^{n+1}}{n+1}$, luego

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n e^{n+1}}{(n+1)e^n} = e > 1$, de acuerdo a la parte a (ii) del criterio de la razón, se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ es divergente.

45. Determinar si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Aplicando el teorema **2.14** se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$, de donde: por el criterio de la integral la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$, es divergente, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+2}$, no es absolutamente convergente.

Ahora aplicaremos el criterio de Leibniz, es decir:

Como $a_n = \frac{n^2}{n^3+2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+2}$ de donde: $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n $\geq$ 1 y además:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2} = 0$. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+1}$, es condicionalmente convergente.

46. Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

De acuerdo al teorema **2.14** se tiene: $\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$, de donde por el criterio de la integral se tiene que la serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ es convergente, por lo tanto la serie alternada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n\ln(n))^2}$, es absolutamente convergente y desde luego la serie es convergente.

47. Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

De cuerdo al teorema **2.14** se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^n$, de donde de acuerdo al criterio de la raíz se tiene que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^n$ es convergente, luego la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n$, es absolutamente convergente y por lo tanto la serie alternada es convergente.

48. Determinar si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)}$ es convergente, divergente o condicionalmente convergente.

Solución

Aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)} \Rightarrow u_{n+1} = (-1)^n\frac{1.4.7...(3n+1)}{7.9.11...(2n+7)}, \text{ luego}$$

$k = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1$, como $k = \frac{3}{2} > 1$, de acuerdo a la parte a **(ii)** del criterio de la razón se concluye que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n+1)}{7.9.11...(2n+7)}$, es divergente.

49. Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+...+e^{n/n}\right)$$

Solución

Sea $a_n = n^{-2}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+...+e^{n/n}\right)$, y tomemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que es divergente (serie armónica), ahora aplicamos el criterio de comparación por limite .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+...+e^{n/n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} e^{i/n} = \int_0^1 e^x dx = e-1>0$$ y como

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, se concluye que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+...+e^{n/n}\right)$ es divergente.

50. Analizar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n}$ es convergente.

Solución

Sea $a_n = \frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n} = \frac{2+[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}\right|]\!]}{3^n} \le \frac{3}{3^n} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^n}$, es convergente y

como $a_n \le b_n$ entonces por el criterio de comparación se concluye que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n}$, es convergente.

Ahora calcularemos la suma de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n}=\frac{[\![|\cos 3\pi+2|]\!]}{3}+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{2}+2\right|]\!]}{3^2}+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{3}+2\right|]\!]}{3^3}+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{4}+2\right|]\!]}{3^4}+$$

$$+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{5}+2\right|]\!]}{3^5}+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{6}+2\right|]\!]}{3^6}+\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{7}+2\right|]\!]}{3^7}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n}=\frac{148}{243}+\left(\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ldots\ldots\right)=\frac{148}{243}+\sum_{n=6}^{\infty}\frac{2}{3^n}\qquad\ldots(1)$$

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3^6}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3^5}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}\qquad\ldots(2)$$

reemplazando **(2)** en **(1)**, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{3\pi}{n}+2\right|]\!]}{3^n}=\frac{148}{243}+\frac{1}{16}=\frac{2369}{3888}$

2.21 Ejercicios Propuestos.-

I. Hallar la suma de las series infinitas en caso de ser convergente.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ Rpta. $\frac{1}{4}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n^2+n}}$ Rpta. 1

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^P}-\frac{1}{(n+1)^P}\right)$ Rpta. 1, P > 0

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n).\ln(n+1)}$ Rpta. $\frac{1}{\ln 2}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ Rpta. $\frac{3}{4}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+2)}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)}$ Rpta. 1

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(n+1))}{\ln(n)^n.(\ln(n+1)^{n+1})}$ Rpta. $\frac{1}{2\ln 2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ Rpta. 1

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ Rpta. $\frac{1}{4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n^2-2n+2)(n^2+1)}$ Rpta. 1

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ Rpta. $\frac{1}{4}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n(n+1)(n+3)}$ Rpta. $\frac{7}{2}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ Rpta. $\frac{1}{60}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+2)(n+4)}$ Rpta. $\frac{67}{96}$

17. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{(n-2)(n+3)n}$ Rpta. $\frac{23}{15}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)(n+2)n}$ Rpta. $\frac{65}{36}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ Rpta. $\frac{15}{2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ Rpta. 1

21. $\sum_{n=3}^{\infty} (\frac{25}{10^n} - \frac{6}{100^n})$ Rpta. $\frac{2150}{99}$

22. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$ Rpta. $-\frac{4}{5}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ Rpta. $\frac{3}{2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$ Rpta. $\frac{3}{2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{3^n}$ Rpta. $-\frac{3}{2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ Rpta. $\frac{1}{e-1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\cos\frac{\pi}{n}+1\right|]\!]}{2^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ Rpta. $\frac{1}{12}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(\text{sen}\frac{1}{n}-\text{sen}\frac{1}{n+1})$ Rpta. sen 1

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$ Rpta. $\frac{8}{3}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\![\left|\text{sen}\frac{4\pi}{n}+3\right|]\!]}{4^n}$ Rpta. $\frac{63.2^{10}+1}{2^{16}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2-4}$ Rpta. $\frac{1}{12}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n}+e^n)$ Rpta.divergente

35. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ Rpta. 1

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$ Rpta. $\frac{5}{4}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{2-3n}3^{4-2n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$ Rpta. $\frac{1}{2(x+1)(x+2)}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)(x+n+1)}$ Rpta. $\frac{1}{2x(x+1)}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ Rpta. $1-\sqrt{2}$

42. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ Rpta. 1

43. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$ Rpta. $\frac{1}{3}$

44. $\frac{1}{\sqrt{1.3}}+\frac{1}{\sqrt{3.5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$ Rpta. Divergente

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{2n^4+28n^3+150n^2+364n+337}{(n+3)^4(n+4)^4}\right]$ Rpta. $\frac{1}{6^3}$

46. Una pelota se deja caer desde una altura de 12 m. cada vez que golpee el suelo salta a una altura de tres cuartos de distancia de la cual cayó. Encontrar la distancia total recorrido por la pelota antes de quedar en reposo.

47. Se deja caer una pelota desde una altura de "a" metros, sobre un piso horizontal, cada vez que la pelota choca contra el suelo, después de caer desde una altura h rebota hasta alcanzar la altura rh, siendo, r un número positivo menor que 1. Hállese la distancia total recorrido por la pelota.

48. ¿Cuál es la distancia total que recorre una pelota de tenis antes de llegar al reposo si se deja caer desde una altura de 100 m. y si, después de cada caída, rebota hasta $\frac{11}{20}$ de la distancia desde el cual cayó?

49. Un triángulo equilátero tiene catetos de 4 unidades de longitud, por lo tanto su perímetro es 12 unidades, otro triángulo equilátero se construye trazando segmentos de recta que pasan por los puntos medios de los catetos del primer triángulo, este triángulo tiene catetos de unidades de longitud y su perímetro es 6 unidades, si este procedimiento se puede repetir un número ilimitado de veces ¿Cuál es el perímetro total de todos los triángulos que se forman?

50. Después de que una mujer que anda en bicicleta retira los pies de los pedales, la rueda de freno gira 300 veces en los primeros 10 seg. luego en cada período sucesivo de 10 seg. la rueda gira $\frac{4}{5}$ partes de lo del período anterior. Determinar el número de rotaciones de la rueda antes de detenerse la bicicleta.

II. Determinar la convergencia ó divergencia de las series infinitas siguientes.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+n}$ Rpta. Convergente

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}$ Rpta. Divergente

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2+n}$ Rpta. Convergente

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+n+2}$ Rpta. Divergente

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\text{sen}(n)+1}{n^3+1}$ Rpta. Convergente

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n}$ Rpta. Divergente

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+n^2}$ Rpta. Convergente

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ Rpta. Divergente

59. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ Rpta. Divergente

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)2^n}$ Rpta. Convergente

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ Rpta. Divergente

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\ln(n+2)}$ Rpta. Divergente

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+1)}}$ Rpta. Convergente

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sec(n)|}{\sqrt{n}}$ Rpta. Divergente

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+10^6\,\text{sen}^2 3n}{n^2}$ Rpta. Converge

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(n\theta)}{n^2}$ Rpta. Convergente

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+100}$ Rpta .Divergente

68. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ Rpta. Convergente

69. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ Rpta. Convergente

70. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{1/n}}$ Rpta. Divergente

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2+3}$ Rpta. Diverge

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ Rpta. Diverge

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ Rpta. Diverge

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ Rpta. Converge

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ Rpta. Diverge

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ Rpta.Converge

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$ Rpta. Diverge

78. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ Rpta. Converge

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n . n}$ Rpta. Converge

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$ Rpta .Converge

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ Rpta. Diverge

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$ Rpta. Diverge

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ Rpta. Diverge

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-5}{n^5}$ Rpta. Diverge

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^3}$ Rpta. Converge

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ Rpta. Converge

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ Rpta. Diverge

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n}$ Rpta. Converge

89. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{3/2}}$ Rpta. Converge

90. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\ln(n)}{n^2+10n^3}}$ Rpta. Diverge

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n5^n}$ Rpta. Converge

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+3}}$ Rpta. Diverge

93. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)+\sqrt{\ln^3(n)}}$ Rpta. Diverge

94. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n}-\sqrt{n}}$ Rpta. Converge

95. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ Rpta. Converge

96. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ Rpta. Converge

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(n+4)}$ Rpta. Converge

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4^n})$ Rpta. Converge

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3^n+1)2^n}$ Rpta. Converge

100. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+e^n}$ Rpta. Converge

101. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ Rpta. Converge

102. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$ Rpta. Converge

103. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ Rpta. Converge

104. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+2}$ Rpta. Converge

105. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n}}$ Rpta. Diverge

106. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ Rpta. Converge

107. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n+1)(n-2)}$ Rpta. Diverge

108. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ Rpta. Diverge

109. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ Rpta. Converge

110. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$ Rpta. Diverge

111. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{4n}}$ Rpta. Diverge

112. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Rpta. Converge

113. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ Rpta. Converge

114. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$ Rpta. Diverge

115. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$ Rpta. Converge

116. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$ Rpta. Converge

117. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4e^{-n}$ Rpta. Converge

118. $\sum_{n=1}^{\infty}n^5e^{-n^2}$ Rpta. Converge

119. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ Rpta. Diverge

120. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(\frac{\pi n}{2})}{e^n}$ Rpta. Converge.

121. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ Rpta. Converge

122. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ Rpta. Converge

123. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$ Rpta. Converge

124. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}n!}{1.3.5.7.9...(2n-1)}$ Rpta. Converge

125. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ Rpta. Diverge

126. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$ Rpta. Converge

127. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}$ Rpta. Diverge

128. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ Rpta. Converge

129. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ Rpta. Converge

130. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$ Rpta. Converge

131. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5n^n}$ Rpta. **Converge**

132. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$ Rpta. **Converge**

133. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ Rpta. **Converge**

134. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+2)}$ Rpta. **Diverge**

135. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ Rpta. **Converge**

136. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3+1}$ Rpta. **Diverge**

137. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ Rpta. **Converge**

138. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ Rpta. **Diverge**

139. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ Rpta. **Diverge**

140. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n).\ln(\ln(n))}$ Rpta. **Diverge**

141. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$ Rpta. **Converge**

142. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\ln(n)})^{3/2}$ Rpta. **Converge**

143. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+10^6}$ Rpta. **Diverge**

144. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$ Rpta. **Converge**

145. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ Rpta. **Converge**

146. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$ Rpta. **Converge**

147. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$ Rpta. **Converge**

148. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{csc}h(n)$ Rpta. **Converge**

149. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+3}{n})$ Rpta. **Diverge**

150. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ Rpta. **Diverge**

151. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ Rpta. **Converge**

152. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ Rpta. **Diverge**

153. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ Rpta. Converge

154. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ Rpta. Diverge

155. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ Rpta. Converge

156. $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln(n))}}{n.\ln(n)}$ Rpta. Diverge

157. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-3)(4n+1)}$ Rpta. Diverge

158. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ Rpta. Converge

159. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{3})^n$ Rpta. Converge

160. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^n}$ Rpta. Converge

161. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ Rpta. Converge

162. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{2n-1})^n$ Rpta. Diverge

163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$ Rpta. Converge

164. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n^2+2})^n$ Rpta. Converge

165. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ Rpta. Converge

166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$ Rpta. Converge

167. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$ Rpta. Converge

168. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{e^{n^2}}$ Rpta. Converge

169. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ Rpta. Converge

170. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ Rpta. Converge

171. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}+1)^n$ Rpta. Diverge

172. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$ Rpta. Diverge

173. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ Rpta. Diverge

174. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ Rpta. Diverge

175. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ Rpta. Diverge

176. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ Rpta. Converge

177. $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{2}{3})^n$ Rpta. Converge

178. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n})^n$ Rpta. Converge

179. $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})$ Rpta. Diverge

180. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}.\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{4.6.8...(2n+2)}$ Rpta.Converge

181. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}})$ Rpta.Diverge

182. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}-1)$ Rpta. Diverge

183. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln(n)}}$ Rpta. Diverge

184. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln(n)}}$ Rpta. Converge

185. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ Rpta. Converge

186. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3^{1/n}}$ Rpta. Diverge

187. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+4}}$ Rpta. Diverge

188. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+2}{\ln(n+1)}$ Rpta. Diverge

190. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt[4]{n^5}}$ Rpta. Converge

191. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{4.8.12...(4n)}$ Rpta. Diverge

192. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^n}$ Rpta. Converge

193. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\operatorname{tg}(\frac{1}{n}).\ln(\frac{n+1}{n})$ Rpta. Converge

194. $\sum_{n=1}^{\infty}((\frac{n+1}{n})^{n+1}-\frac{n+1}{n})^{-n}$ Rpta. Converge

195. $(\frac{3}{4})^{1/2}+\frac{5}{7}+(\frac{7}{10})^{3/2}+....+(\frac{2n+1}{3n+1})^{n/2}+.....$ Rpta. Converge

196. $\frac{3}{3}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{9}{7})^3+....+(\frac{3n}{2n+1})^n+....$ Rpta. Diverge

197. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ Rpta. Convergente(sug. $\frac{n^3}{n!}<\frac{n^3}{n^5}$)

198. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n).\ln(n+1)}$ Rpta. Divergente (sug. probar que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n)}$ diverge)

199. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+2\ln(n)}$ Rpta. Divergente(sug.comparación $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$)

200. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2-\text{sen}^2(100^n)}$ Rpta. Convergente(sug. $\frac{\sqrt{n}}{n^2-\text{sen}^2 100^n}<\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}<\frac{2}{n^{3/2}}$)

201. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3\ln(n)}$ Rpta. Divergente (sug. $\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3\ln(n)}>\frac{1}{n\ln(n)}$)

202. Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^P}$ es convergente si y solo si P > 1.

203. Demostrar que la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n).(\ln(\ln(n)))^P}$ es convergente si ysolo si P>1

III. Ejercicios sobre convergencia y divergencia.

204. Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n-1})^{\alpha}$

Rpta. Converge para $\alpha > 1$

205. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-1\right)$ si es convergente ó divergente.

Rpta. Divergente

206. Demostrar que la serie de términos positivos $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\left(\ln(n)\right)^{\beta}}$, converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha<1$, y que si $\alpha = 1$ solo converge cuando $\beta > 1$.

207. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{n}\left(a+\frac{a}{n}\right)$

Rpta. $\operatorname{tg} a > 1$ Convergente
$\operatorname{tg} a \leq 1$ Divergente

208. Estudiar según los valores de α y β la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}n^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^{\beta}$$

Rpta. $\beta > \alpha$ Convergente
$\beta \leq \alpha$ Divergente

209. En la hipótesis en donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son convergente se pregunta:

a. ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$? Rpta. Si

b. ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n . b_n$? Rpta. Si

c. ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n b_n}$? Rpta. Si

d. Si la sucesión $\{a_n\}_{n>1}$ es monótona, demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}na_nb_n$ es convergente.

210. Para que valores de r converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^{r}}$ Rpta. $r>1$

211. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^{P}$, converge para $P>2$ y diverge para $P\le 2$ (criterio de Roobe)

212. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6.8..(2n)}{1.3.5.7..(2n-1)}$ Rpta. Divergente (criterio de Roobe)

213. Analizar la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)^{n}.(\ln(\ln(n)))^{S}}$

Rpta. Si $S<1$, la serie es Divergente.
Si $S\ge 1$, la serie es Convergente

214. Determinar para que valores del parámetro "a" converge y para cuales diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^{4}+n^{a}}-n^{2})$

Rpta. Converge para $a<1$ y diverge para $a\le 1$

215. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}n^{S}(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ converge para $S<½$ y diverge $S\ge ½$.

216. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{n}}$ diverge

217. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^{2}(\frac{\pi n}{3})}{2^{n}}$

Rpta. Converge

218. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\ln(4n+1)}{n(n+1)}$

Rpta. Converge

219. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ($a_n > 0$) divergente. Si $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ demostrar que:

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ Diverge

ii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ Diverge

iii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(S_n)^2}$ Converge

220. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) una serie convergente, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n.a_{n+1}}$ Converge.

221. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ decreciente, ($a_n > 0$) Si $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n.a_{n+1}}$ converge, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

222. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4n^2}{n!+7n}$

Rpta. Converge

223. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n.n!}{n^n}$ es divergente.

IV. Determinar si la serie dada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente ó divergente.

224. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

225. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

226. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

227. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ Rpta. Absolutamente Convergete.

228. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

229. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+2)}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

230. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

231. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n)}{n^2}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

232. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Rpta. Absolutamente Convergente.

233. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{10^n}$ Rpta. Divergente.

234. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ Rpta. Condicionalmente Convergente.

235. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+10}$ Rpta. Condicionalmente Convergente.

236. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^3$ Rpta. Absolutamente Convergente.

237. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ Rpta. Absolutamente Convergente.

238. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$ Rpta. Divergente.

239. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(e^n+e^{-n})}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

(sug. $e^n+e^{-n}<2e^n$)

240. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^2(n+1)}$ Rpta. Absolutamente Convergente

$\left(sug.: \frac{1}{n\ln^2(n+1)}\leq\frac{1}{n\ln^2(n)}\right)$

241. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ Rpta. Divergente $\left(sug.: \lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0\right)$

242. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{3/7}}{(n+1)!}$ Rpta. Absolutamente convergente

243. $\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}(\ln(n))$ Rpta. Divergente

244. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ Rpta. Absolutamente convergente.

(sug.: criterio de la razon a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n}$)

245. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(n\ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$ Rpta. Absolutamente Convergente.

$\left(sug.: n\ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\leq 1 \Rightarrow \ln\left(n\ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)\leq 0\right)$

246. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-n\ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$ Rpta. Absolutamente Convergente

247. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ Rpta. Absolutamente Convergente.

248. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$. Rpta. Condicionalmente Convergente

249. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}$ Rpta. Divergente

250. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1}{2}}\left(\frac{n^{100}}{2^{n}}\right)$ Rpta. Absolutamente Convergente

251. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(1\ \mathrm{l}n)}{n}$ Rpta. Absolutamente Convergente

$\left(sug.: \operatorname{sen}\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\ \text{de donde}\ \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}\leq\frac{1}{n^{2}}\right)$

252. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{3/2}$ Rpta. Absolutamente Convergente

253. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n^{3}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

254. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(\pi n)}{n!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

255. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n)+\operatorname{sen}(2\pi n)}{n^{3/2}}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

256. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

257. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n)+\cos(3n)}{n^2+n}$ **Rpta.** Absolutamente Convergente

258. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ **Rpta.** Divergente

259. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ Rpta. Divergente

261. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

262. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n2^n}$ Rpta. Divergente

263. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{4^n}$ Rpta. Absolutamente Convergente

264. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$ Rpta. Absolutamente Convergente

265. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^3+1}$ Rpta. Divergente

266. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10}{(5n-2)^{1/4}}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

267. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$ Rpta. Divergente

268. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^{2/3}-1}{4^n}$ Rpta. Absolutamente Convergente

269. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-3)!}{3^{n-1}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

270. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

271. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1000n+10^6}$ Rpta. Divergente

272. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

273. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ Rpta. Divergente

274. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ Rpta. Absolutamente Convergente

275. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^4+2}$ Rpta. Absolutamente Convergente

276. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4/3)^n}{n^2}$ Rpta. Divergente

277. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n-1}}{n.n!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

278. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{1.3.5....(2n-1)}$ Rpta. Absolutamente Convergente

279. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

280. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2.4.6....(2n)}{1.4.7...(3n-2)}$ Rpta. Absolutamente Convergente

281. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ Rpta. Absolutamente Convergente

282. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

283. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^3}{(n^2+1)^{4/3}}$ Rpta. Divergente

284. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^{n-1}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

285. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{(n+1)e^{n}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

286. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

287. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{2^{n}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

288. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ Rpta. Divergente

289. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$ Rpta. Absolutamente Convergente

290. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n(\frac{\pi}{4})}{n!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

291. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{10^6 n+1}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

292. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ Rpta. Absolutamente Convergente

$(sug.: \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\leq\frac{1}{2n^{3/2}})$

293. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\operatorname{sen}(n)}{n^3}$ Rpta. Absolutamente Convergente

294. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ Rpta. Absolutamente Convergente

$(sug.: \operatorname{tg}(\frac{1}{n\sqrt{n}})\leq\frac{1}{n\sqrt{n}})$

295. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{3n+1}}{(3n+1)!}$ Rpta. Absolutamente Convergente

296. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{7.9.11\ldots.(2n+5)}$ Rpta. Divergente

297. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

298. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

299. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6n^2-9n+2}{n^3}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

300. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^n}{n^3}$ Rpta. Divergente

301. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2}$ Rpta. Condicionalmente Convergente

302. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7 7^{n+3}}{2^{3n}}$ Rpta. Absolutamente Convergente

303. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+n(\frac{\pi}{2}))}{n+1}$ Rpta. Convergente

304. Calcular la suma de la serie: $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots$ Rpta. $\frac{1}{4}$

305. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$,si converge calcular su suma.

Rpta. $\frac{1}{1+a}$

306. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{2n^3+33n^2+183n+341}{(n+5)^3\,(n+6)^3}]$ Rpta. $\frac{1}{6^3}$

307. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3\,(n+1)^n}$ Rpta. 1

308. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2+1}\right)$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-4)^2}{e^{7n}}$ Converge

309. Estudiar la convergencia ó divergencia de las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4n-1}+(-1)^n \frac{1}{n}\right]$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2+1}{n^3+4n+1}+(-1)^n \frac{1}{n^2}\right]$

310. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[\frac{5+(-2)^n}{9}\right]^n$

311. Estudiar según los valores de a y b la serie siguiente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^a \left[\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right]^b$.

312. Las siguientes series son convergentes, calcular sus sumas.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2^n-1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg.}\left(\frac{2n+1}{1+n^2(n+1)^2}\right)$

313. Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2^n-1}$.

314. Estudiar las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2-9n+4}{n^3}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 . 2^n}{(2n)!}$

315. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie.

a. $\sum_1 = \frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots$ b. $\sum_2 = \log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\ldots$

316. Analizar la siguiente serie.

a. $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$$

b. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)(k+n+1)}\right)$$ Rpta. Diverge

317. Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3n)(5+3n)(8+3n)}$

318. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg.}(\ln(n))\right]$ analizar.

319. Demostrar que la suma de la serie de término n-ésimo $\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}+\frac{1}{8n-3}+\frac{1}{8n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$, tiene como serie $\frac{3}{2}\ln 2$, es decir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}+\frac{1}{8n-3}+\frac{1}{8n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right]=\frac{3}{2}\ln 2.$$

320. Sumar las series:

a. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n^3+3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)^3}$$

b. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+8n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$$

c. $$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg.}\left(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{1+n^4(n+1)^4}\right)$$

d. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$$

e. $$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)$$

f. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)5^n}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{(2n+1)!}$ j. $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-5^n)^2.7^{-2n}$

321. Estudiar la convergencia de la serie.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\frac{1}{n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\,\text{sen}^3(\frac{a}{3^{n+1}})$, $a>0$

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n(n+1)+4}{3^n+n^3}$

322. Determinar la convergencia ó divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...+\frac{n+1}{n+2})}$$ Rpta. Convergente

323. Determinar la convergencia ó divergencia.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.6.11.16...(5n-4)}{2.6.10.14...(4n-2)}$ Rpta. Divergente

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.7...(4n-1)}{2.4.6.8...(4^n)}$ Rpta. Divergente

324. analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)}{(q+1)(q+2)(q+3)...(q+n)}$

Rpta. i. $q>p+1$ converge (por Raabe)
ii. $q<p+1$ diverge
iii. $q=p+1$ diverge

325. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+68}\int_{0}^{1+\frac{1}{n}}(x^{12}+x^{10}+x^{8}+x^{6}+x^{4}+x^{2}+8)^{-2}\,dx$ Rpta. Diverge

326. Hallar la suma de las series.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^{2}+37n+34}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ Rpta. $\dfrac{11}{4}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+n-1}{(n^{2}+1)(n^{2}+2n+2)}$ Rpta. $\dfrac{1}{2}$

CAPITULO III

3. SERIES DE POTENCIAS

3.1 Definición.- Una serie de la forma:

$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$, es decir:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots}$$

donde: a y los c_i, i =1,2,.....,n son constantes, es llamada serie de potencia en x-a.

Cuando a = 0, se tiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, que se denomina serie de potencia en x.

Observación.-

1º Cuando x toma un valor particular, obtenemos una serie numérica de los que ya se ha estudiado.

2º Si una serie converge para ciertos valores de x, podemos definir una función de x haciendo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \text{ó} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde el dominio de estas funciones son todos los valores de x para los cuales la serie converge.

3º Para determinar los valores de x, para los cuales la serie de potencia converge, se usan los criterios anteriores, especialmente el criterio de la razón.

3.2 Propiedades.- Consideremos la serie de potencia siguiente:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n}$$

1º Si esta serie diverge para x - a = c, entonces diverge para todos los valores de x, para los cuales $|x - a| > |c|$.

2º Si ésta serie converge para x - a = b, entonces es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x - a| < |b|$.

3º Se cumple exactamente una de las condiciones siguientes:

i. La serie converge solamente cuando x -a = 0

ii. La serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.

iii. Existe un número P > 0, tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x, para los cuales $|x - a| < P$ y diverge para todos lo valores de x, para los cuales $|x - a| > P$.

3.3 Definición

i. El conjunto de todos los valores de x, para los cuales una serie de potencia converge, se llama intervalo de convergencia.

ii. El número P > 0 de la propiedad **3º iii.** se llama radio de convergencia de la serie de potencia.

Observación.- Si P es radio de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, entonces el intervalo de convergencia es uno de los intervalos siguientes <a - p, a + p>, [a - p, a + p> , <a - p, a + p] y [a - p, a + p]

Ejemplo.- Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n = \frac{x^n}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, luego por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\ x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| < 1$$

como $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Ahora analizaremos para $|x| = 1$, es decir para $x = \pm 1$.

Si $x = -1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

Si $x = 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica).

Luego el intervalo de convergencia es $[-1,1>$ y el radio de convergencia es $p = 1$.

3.4 Diferenciación de Series de Potencias.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia $p > 0$ y si

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, entonces existe $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x-a)^{n-1}$, $\forall x \in < a-p, a+p >$

Además, p es también el radio de convergencia de ésta serie, es decir, si $p \neq 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencia, la cual define una función f, entonces f es diferenciable en $<a - p, a + p>$ y la derivada de f se puede obtener derivando la serie de potencia término a término.

3.5 Integración de Series de Potencias.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia $p > 0$ y

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, entonces f es integrable en todo subintervalo cerrado

de $<a - p, a + p>$ y $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$ donde: $x \in <a - p, a + p>$,

además p es también el radio de convergencia de la serie resultante.

Es decir: Si $p \neq 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencia, la cual define una función f, entonces f es integrable en todo subintervalo cerrado de $<a - p, a + p>$ y la integral de f se obtiene integrando la serie de potencia término a término.

3.6 Serie de Taylor.-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencia con radio de convergencia p, entonces definimos la función f de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \qquad \ldots(1)}$$

Para todo $x \in <a - p, a + p>$.

Ahora buscaremos la relación que existe entre los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, con la función f y sus derivadas al evaluar en el punto a.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \Rightarrow f(a) = c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots \Rightarrow f'(a) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + \ldots \Rightarrow \frac{f''(a)}{2!} = c_2$$

$$f'''(x) = 1.2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + 3.4.5c_5(x-a)^2 + \ldots \Rightarrow \frac{f'''(a)}{3!} = c_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots nc_n + 2.3\ldots(n+1)c_{n+1}(x-a) + \ldots \Rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$$

Reemplazando $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ en la ecuación **(1)**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

por lo tanto: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Luego a la serie de potencia de la función f, representado por:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se denomina serie de Taylor alrededor del punto a:

Observación.- Si en la serie de Taylor $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, hacemos a = 0, se tiene la siguiente serie.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

A esta serie se llama serie de **Maclaurin**.

Ejemplo.- Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x)=e^x$

Solución

$$\begin{cases} f(x)=e^x & & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & & f'(0)=1 \\ f''(x)=e^x & \Rightarrow & f''(0)=1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f^{(n)}(x)=e^x & & f^{(n)}(0)=1 \end{cases} \qquad \textbf{...(1)}$$

Como el desarrollo de la serie de **Maclaurin** es:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dots \qquad \textbf{...(2)}$$

Al reemplazar **(1)** en **(2)** se tiene:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

$$\therefore \quad f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3.7 Ejercicios Desarrollados.-

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n . n^3}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n = \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n . n^3} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x+1)^{n+1}}{3^{n+1} . (n+1)^3}$

Ahora aplicamos el criterio de la razón:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{3^n . n^3 (-1)^{n+1} (x+1)^{n+1}}{3^{n+1} (n+1)^3 (-1)^n (x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{3} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \frac{|x+1|}{3} < 1$$

Como $\left|\frac{x+1}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3$

$$\therefore \quad -4 < x < 2$$

Ahora analizaremos cuando $\left|\frac{x+1}{3}\right| = 1$, es decir para x = -4, x = 2

Si x = -4 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{3^n . n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es convergente.

Si x = 2 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ es convergente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es [-4, 2] y el radio de convergencia es p=3.

2. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n.(2n)!}$ y el radio de convergencia.

Solución

Como $u_n=\frac{(-1)^{n+2}(n!)^2(-2)^n}{2^n.(2n)!} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}((n+1)!)^2(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}.(2n+2)}$

Aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n.(2n)!(-1)^{n+2}((n+1)!)^2(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+2)!(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}\right|$$

$$=\left|\frac{x-2}{2}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2+6n+2}=\frac{|x-2|}{8}<1$$

Como $|x-2|<8 \Rightarrow -8<x-2<8 \Rightarrow -6<x<10$

Ahora analizaremos para $\frac{|x-2|}{8}=1$, es decir para x = -6, x = 10

Si x = -6 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(-8)^n}{2^n(2n)!}$ es divergente (criterio de comparación).

Si x = 10 se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2\,8^n}{2^n(2n)!}$ es divergente (criterio de comparación).

Luego el intervalo de convergencia es <-6, 10> y el radio de convergencia es p = 8.

3. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n=(-1)^n\dfrac{x^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1}=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, aplicando el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!x^{n+1}}{(-1)^n(n+1)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|.(0)=0<1 \quad \forall\ x\in R.$$

Luego la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$ es convergente, $\forall$ x $\in$ R y el radio de convergencia $\rho=\infty$.

4. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!x^n}{3^n}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n=\dfrac{(-1)^n n!x^n}{3^n} \Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}}{3^{n+1}}$, por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}3^n}{(-1)^n\ n!x^n.3^{n+1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=+\infty$$

Luego para x $\neq$ 0 , $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to\infty$, cuando x $\to\infty$, por lo tanto la serie de potencia converge cuando x = 0 y el radio de convergencia es $\rho=0$.

5. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!(x-3)^n}{1.3.5...(2n-1)}$ y el radio de convergencia.

Solución

Sea $u_n=\dfrac{n!(x-3)^n}{1.3.5...(2n-1)} \Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!(x-3)^{n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$, por el criterio de la razón se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x-3)^{n+1}(1.3.5....(2n-1)}{n!(x-3)^n(1.3.5...(2n+1))}\right| = \lim_{n\to\infty}|x-3|(\frac{n+1}{2n+1}) = |x-3|(\frac{1}{2}) < 1$$

$\Rightarrow |x - 3| < 2 \;\Rightarrow\; -2 < x - 3 < 2 \;\Rightarrow\; 1 < x < 5$

Ahora analizaremos cuando $|x-3| = 2$ es decir para x = -1, x = 5

Si x = -1 se tiene $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(-4)^n}{1.3.5...(2n-1)}$ es divergente (probar).

Si x = 5 se tiene $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!2^n}{1.3.5...(2n-1)}$ es divergente (probar).

Luego la serie de potencia converge en <1, 5> y el radio de convergencia es p = 2.

6. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(n^n)x}{n\sqrt{n}}$.

Solución

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}}$, como $|\text{sen}\, n^n\; x| \leq 1$

$\forall\; n \in Z^+ \;\wedge\; \forall\; x \in \mathbf{R} \;\Rightarrow\; \frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\text{sen}(n^n x)|}{n\sqrt{n}}$ es convergente, luego es absolutamente convergente.

7. Representar en serie de **Maclaurin** a la función $f(x) = e^{-x^2}$

Solución

Se conoce que $g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

$$f(x)=g(-x^2)=e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

$$f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

8. Desarrollar en serie de Maclaurin la función f(x) = sen x.

Solución

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{sen}x \\ f'(x)=\cos x \\ f''(x)=-\operatorname{sen}x \\ f'''(x)=-\cos x \\ f^{iv}(x)=\operatorname{sen}x \\ f^{v}(x)=\cos x \\ f^{vi}(x)=-\operatorname{sen}x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=-1 \\ f^{iv}(0)=0 \\ f^{v}(0)=1 \\ f^{vi}(0)=0 \end{matrix} \qquad \ldots\textbf{(1)}$$

Como la serie de **Maclaurin** es:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\ldots.. \qquad \ldots\textbf{(2)}$$

Ahora reemplazando **(1)** en **(2)** se tiene:

$$f(x)=\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots..+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\therefore\ f(x)=\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

9. Desarrollar en serie de Maclaurin la función f(x) = sen h x.

Solución

Se conoce que: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y además se tiene:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots..$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots..$$

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\left(\frac{x^3}{3!}\right) + 2\left(\frac{x^5}{5!}\right) + \ldots + 2\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + \ldots..$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots..$$

$$\therefore \quad f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

10. Probar que: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, sobre <-1,1>

Solución

Mediante la serie geométrica convergente se tiene:

$1 + x + x^2 + \ldots.. + x^{n-1} + \ldots. = \dfrac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$, valiéndose de esta serie tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots$$

$$= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-(-x^2)}, \qquad \text{para } |x^2| < 1$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, para $|x| < 1$

puesto que: $|x^2| < 1 \Rightarrow |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$

11. Mostrar que: $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, si $|x| < 1$

Solución

De acuerdo al ejercicio 10. se tiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots, \qquad \text{para } |x| < 1$$

Ahora integramos esta serie término a término.

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \ldots\right) dt$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad \text{si } |x| < 1$$

12. Obtener una representación en serie de potencia de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Solución

De acuerdo a la serie geométrica convergente, se tiene:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$, si $|x| < 1$, derivando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + \ldots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{para } |x| < 1$$

13. Verifica que: $\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$

Solución

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, es convergente $\forall$ x, pues $\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, es convergente, afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, es convergente, $\forall$x, a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ expresaremos en la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}=\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}3x}{9}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}+\ldots$$

Integrando miembro a miembro de 0 a π se tiene:

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx=\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}nx}{n^2}+\ldots)dx$$

$$=(\cos x+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{\cos 3x}{27}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^3})\Big/_0^{\pi}$$

$$=-[(-1+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{3.9}+\frac{1}{4.16}-\frac{1}{5.25}+\ldots)-(1+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{4.16}+\frac{1}{5.25}+\ldots)]$$

$$=2[1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.25}+\ldots]=2[1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}$$

14. Encontrar una representación en serie de potencia de: $\int_0^x e^{-t^2}dt$

Solución

Se conoce que: $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+...+\frac{x^{n}}{n!}+....$, ahora reemplazamos x por $-t^{2}$ se tiene: $e^{-t^{2}}=1-t^{2}+\frac{t^{4}}{2!}+....(-1)^{n}\frac{t^{2n}}{n!}+...$

Luego integramos miembro a miembro de 0 a x.

$$\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt=\int_{0}^{x}\left(1-t^{2}+\frac{t^{4}}{2!}+\frac{t^{6}}{3!}+...+(-1)^{n}\frac{t^{2n}}{n!}+...\right)dt$$

$$=\left(t-\frac{t^{3}}{3}+\frac{t^{5}}{2!5}-\frac{t^{7}}{3!7}+...+\frac{(-1)^{n}t^{2n+1}}{n!(2n+1)}+...\right)\Big/_{0}^{x}$$

$$=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{2!5}-\frac{x^{7}}{3!7}+...+\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+...$$

$$\therefore\quad \int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

15. Calcular aproximadamente con tres cifras decimales el valor de: $\int_{0}^{1/2}e^{-t^{2}}dt$

Solución

De acuerdo al ejercicio 14 se tiene:

$$\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{2!5}-\frac{x^{7}}{3!7}+...,$$ para x = ½ se tiene:

$$\int_{0}^{1/2}e^{-t^{2}}dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5370}+...$$

$$= 0.5 - 0.04117 + 0.0031 - 0.0002 + ... = 0.4614$$

16. Encontrar una serie de potencias en x que sea convergente a la función $\frac{\ln(1+x)}{1+x^{2}}$.

Solución

De acuerdo a la serie geométrica convergente se tiene:

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$, si $|x|<1$, ahora reemplazamos x por -x se tiene:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+... \text{ si } |x|<1$$

Integrando miembro a miembro se tiene:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$$

Nuevamente en la serie geométrica reemplazamos x por $-x^2$ obteniéndose la serie:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+... \text{ si } |x|<1.$$

Multiplicando las dos series se tiene:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{13}{15}x^5+... \text{ si } |x|<1$$

17.- Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}n!}$, si es convergente. Hallar su suma.

Solución

Para determinar la convergencia aplicamos el criterio de la razón.

Sea $a_n=\frac{1}{8^{n+1}n!} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{8^{n+2}(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8(n+1)}=0<1 \Rightarrow \text{ la serie es convergente.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}n!}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}=\frac{1}{8}(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}) \qquad ...(1)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/8)^n}{n!}=e^{1/8}$, $(\sum_{n=e}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x)$ **...(2)**

Ahora reemplazando **(2)** en **(1)** se tiene: $e^{1/8}=\frac{1}{8}(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^n})$

$$\frac{e^{1/8}}{8}=\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^{n+1}},\quad \text{de donde: } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!8^{n+1}}=\frac{e^{1/8}}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(e^{1/8}-1)$$

18. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$, si converge calcular la suma

Solución

Para determinar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$ aplicaremos el criterio de la razón.

Sea $a_n=\frac{(n+4)!}{3!n!4^n} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+5)!}{3!(n+1)!4^{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+5)!3!n!4^n}{(n+4)!3!(n+1)!4^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{(n+1)4}=\frac{1}{4}<1$, entonces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}$, es convergente, ahora calcularemos la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{3!4^n}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+10n^3+35n^2+50n+24}{4^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^4(\frac{1}{4})^n+10\sum_{n=1}^{\infty}n^3(\frac{1}{4})^n+35\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{4})^n+50\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{4})^n+24\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n \quad ...\ \mathbf{(1)}$$

Ahora utilizamos la serie de potencia: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

$$1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}, \text{ derivando:}$$

$$1+2x+3x^2+...+n\,x^{n-1}+....=\frac{1}{(1-x)^2}, \text{ multiplico por x}$$

$$x+2x^2+3x^3+...+n\,x^n+...=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Como $x+2x^2+3x^3+...+n\,x^n+...=\frac{x}{(1-x)^2}$, derivando:

$$1+2^2x+3^2x^2+...+n^2x^{n-1}+...=\frac{x+1}{(1-x)^3}, \text{ multiplico por x}$$

$$x+2^2x^2+3^2x^3+...+n^2x^n+...=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

Como $x+2^2x^2+3^2x^3+...+n^2x^n+...=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$, derivando:

$$1+2^3x+3^3x^2+...+n^3x^{n-1}+...=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}, \text{ multiplico por x}$$

$$x+2^3x^2+3^3x^3+...+n^3x^n+...=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

Nuevamente derivando la expresión:

$$x+2^3x^2+3^3x^3+...+n^3x^n+...=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$1+2^4x+3^4x^2+...+n^4x^{n-1}+...=\frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5}$$, multiplico por x

$$x+2^4x^2+3^4x^3+...+n^4x^n+...=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^4x^n=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

Ahora reemplazamos $x=\frac{1}{4}$ en las series obtenidas

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{4}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{1}{3}\qquad ...(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{4})^n=\frac{4}{9}\quad;\quad\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{4})^n=\frac{20}{27}\qquad ...(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3(\frac{1}{4})^n=\frac{132}{81}\quad;\quad\sum_{n=1}^{\infty}n^4(\frac{1}{4})^n=\frac{1140}{243}\qquad ...(4)$$

Reemplazando **(2), (3), (4)** en **(1)** se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{3!n!4^n}=\frac{1}{6}[\frac{1140}{243}+\frac{1320}{81}+\frac{700}{27}+\frac{200}{9}+8]$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{3!n!4^n} = \frac{9372}{729}$$

19. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x| < 1$ aplicar esta fórmula para sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)10^{2n}}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad \textbf{... (1)}$$

Como $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ si $|x| < 1$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$-x - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -1 - \frac{1}{x}\ln(1-x) \qquad \textbf{... (2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \textbf{... (3)}$$

Ahora reemplazando **(2)**, **(3)** en **(1)** se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\ln(1-x) - \left(-1 - \frac{1}{x}\ln(1-x)\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(10^{2n})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{100})^n}{n(n+1)}=1+\frac{1-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}}\ln(1-\frac{1}{100})=1+99\ln\frac{99}{100}$$

20. Desarrollar $F(x)=\frac{1}{x}$ en serie de potencias alrededor de x = 2.

Solución

$$F(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \text{ , de donde:}$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{F''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{F'''(2)}{3!}(x-2)^3+...$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=F'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad F''(x)=\frac{2}{x^3},\quad F'''(x)=-\frac{6}{x^4},...$$

$$F(2)=\frac{1}{2}=F'(2)=-\frac{1}{4},\quad F''(2)=\frac{2}{8},\quad F'''(2)=-\frac{6}{16},...$$

$$F(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{2!}{3^3}\frac{(x-2)^2}{2!}-\frac{3!}{2^4}\frac{(x-2)^3}{3!}+...$$

$$\therefore\ F(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

21. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}[n^2(\frac{1}{e^2})^n-8n(\frac{1}{e^2})^n+16(\frac{1}{e^2})^n]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{e^2})^n-8\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{e^2})^n+16\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{e^2})^n \quad ...\ (1)$$

Ahora aplicamos la serie geométrica convergente.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n+\ldots \quad \text{si } |x|<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}\text{ , donde: para } x=\frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{1}{e^2-1} \qquad \ldots (2)$$

Como $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n+\ldots$ si $|x|<1$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2}\text{, donde: para } x=\frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{e^2}{(e^2-1)^2} \qquad \ldots (3)$$

Como $\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+\ldots+n\,x^n+\ldots$ si $|x|<1$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3}=1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=\frac{x+1}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\text{, donde: para } x=\frac{1}{e^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1}{e^2}\right)^n=\frac{e^2+e^4}{(e^2-1)^3} \qquad \ldots (4)$$

Ahora reemplazando **(2), (3), (4)** en **(1)**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)^2}{e^{2n}}=\frac{e^4+e^2}{(e^2-1)^3}-\frac{8e^2}{(e^2-1)^2}+\frac{16}{e^2-1}=\frac{9e^4-23e^2+16}{(e^2-1)^3}$$

22. Comprobar la representación en serie de potencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{para}, \ |x| < 1$$

Solución

Aplicando la serie geométrica convergente, es decir:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n + ..., \quad \text{si} \quad |x| < 1$$

Ahora derivamos miembro a miembro.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ... + n\,x^{n-1} + ..., \quad \text{si} \ |x| < 1$$

Multiplicando ambos miembros por x, es decir:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + ... + n\,x^n + ..., \text{ de donde:}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{para} \ |x| < 1.$$

23. Comprobar la representación en serie de potencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}, \quad \text{para} \ |x| < 1$$

Solución

Del ejercicio **(22)** se tiene: $\dfrac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + ... + n\,x^n + ..., \quad \text{si} \ |x| < 1$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2^2 x + ... + n^2\,x^{n-1} + ...$$

Multiplicando ambos miembros por x.

$$\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+...+n^2x^n+..., \text{ de donde:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}, \quad \text{para } |x|<1$$

24. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}, \quad \text{si } |x|<1$$

Solución

Aplicando la serie geométrica convergente.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+x^n+... \quad \text{si } |x|<1$$

Mediante el ejercicio **(23)** se tiene:

$$\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+3^2x^3...+n^2x^n+..., \quad \text{si } |x|<1$$

Derivando ambos miembros.

$$\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}=1+2^3x+3^3x^2+...+n^3x^{n-1}+...$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1}=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$, de donde: $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

25. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}, \quad \text{si } |x|<1$$

Solución

Del ejercicio **(24)** se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$, desarrollando

$$x+2^3x^2+3^3x^3+\ldots+n^3x^n+\ldots=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}, \text{ derivando}$$

$$1+2^4x+3^4x^2+\ldots+n^4x^{n-1}+\ldots=\frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5}$$

Multiplicando ambos miembros por x tiene:

$$x+2^4x^2+3^4x^3+\ldots+n^4x^n+\ldots=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$$

de donde: $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^4 = \dfrac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$, para $|x| < 1$

3.8 Ejercicios Propuestos.-

I. Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series y dar el radio de convergencia.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ Rpta: $2 < x < 4$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ Rpta. $2 \le x \le 4$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ Rpta. $1-\dfrac{1}{e} < x < 1+\dfrac{1}{e}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ Rpta. $|x| < 1$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$ Rpta. $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}$ Rpta. $\forall\ x \in R$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)_n^n x^n$ Rpta. $|x| < 1$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ Rpta. $-2 \le x \le 2$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)\frac{x^n(n+2)}{n+1}$ Rpta. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$ Rpta. $|x| < 3$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ Rpta. $\forall\ x \in R$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$ Rpta. $x \in [0,2]$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ Rpta. $x = 0$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}h(2n)x^n$ Rpta. $x \in \left< -\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2} \right>$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ Rpta. $\forall\ x \in R$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$ Rpta. $x \in [-2,2\rangle$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/n} \pi^n x^n}{n(n+1)(n+2)}$ Rpta. $x \in [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ Rpta: $x > 1$ absolutamente convergente

$-x < 1$ es condicionalmente convergente.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Rpta: $-1 < x < 1$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ Rpta: es divergente $\forall$ x $\in$ R

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + \frac{1}{2^n x^n})$ Rpta: $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$ Rpta: $-1 < x < 1$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ Rpta: $-1 < x < 1$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ Rpta: $-1 < x \leq 1$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ Rpta: $-1 < x < 1$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^{2n-1}x^n$ Rpta: -4 < x < 4

28. $\sum_{n=0}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$ Rpta: $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ Rpta: -e < x < e

30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n.\ln(n)}$ Rpta: -3 < x < 3

31. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}$ Rpta: -1 < x < 1

32. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^{n!}$ Rpta: -1 < x < 1

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$ Rpta: 0 < x < 4

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$ Rpta: -e - 3 < x < e - 3

35. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$ Rpta: x = -3

36. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$ Rpta: 2 < x < 8

37. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$ Rpta: $-\frac{5}{4}<x<\frac{13}{4}$

38. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ Rpta: $2 \le x \le 4$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^5}{n5^n}$ Rpta: $-2 < x < 8$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ Rpta: $-2 < x < 0$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$ Rpta: $1 < x < 3$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n.9^n}$ Rpta: $-2 < x < 4$

43. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$ Rpta: $1 < x < 5$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ Rpta: $-3 < x < -1$

45. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ Rpta: $1 < x < 3$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ Rpta: $1 < x \le 3$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}.n^n}$ Rpta: $-2 < x < 0$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$ Rpta: $x > 1,\ x \le -1$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.3^n(x-5)^n}$ Rpta: $x \geq 5\frac{1}{3}$, $x < 4\frac{2}{3}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ Rpta: $x > 3$, $x < 1$

51. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$ Rpta: $x \geq 1$, $x \leq -1$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ Rpta: $-\frac{1}{e} \leq x < \frac{1}{e}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 x^n$ Rpta: $-1 < x < 1$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n x^n}{2^n}$ Rpta: $-2 < x < 2$

55 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ Rpta: $0 < x < 2$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x+2)^n$ Rpta: $-4 < x < 0$

58. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

59. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n.2^n}$ Rpta: $|x-2| < 2$

60. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ Rpta: $|x| < 1$

61. $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n (n+1)(x-1)^n$ Rpta: $|x-1| < \frac{1}{2}$

62. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!}$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

63. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-2)x^{2n-1}}{2^{2n-2}(n-1)!(n-1)!(2n-1)}$ Rpta: $|x| < 1$

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$ Rpta: $-1 \le x \le 1$

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$ Rpta: $-1 < x \le 3$

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x^2)^n}$ Rpta: $\forall\ x \neq 0$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 (\frac{1-x}{1+x})^n$ Rpta: $x > 0$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$ Rpta: $x \le 0$

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}x^n$ Rpta: $-1 \le x < 1$

70. $\sum_{n=1}^{\infty}n^x x^n$ Rpta: $x = 0$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

72. $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n))^2 x^n$ Rpta: $-1 < x < 1$

73. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$ Rpta: $-1 < x < 1$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^n x^n$ Rpta: $x = 0$

75. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-2)^n)x^n$ Rpta: $|x| < \frac{1}{2}$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)x^n$ Rpta: $|x| < \frac{1}{2}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ Rpta: $|x| < \frac{1}{4}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{(3n)!} x^n$ Rpta: $|x| < 27$

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5n} x^n}{(2n)! n^{3n}}$ Rpta: $|x| < \frac{4}{e^2}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! x^n}{(n!)^2}$ Rpta: $x = 0$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n)}{n!} x^n$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n!} x^n$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(n(\pi/2)\right)}{2^n} xa^n$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n} x^n$ Rpta: $|x| < 2$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2\pi n}{3^n} x^n$ Rpta: $|x| < 3$

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ Rpta: $|x| < e$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 4n} (x-2)^n$ Rpta: $1 < x \leq 3$

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 . 2^n}$ Rpta: $-2 \leq x \leq 2$

89. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x-3)^{2n-2}}{3n-2}$ Rpta: $1 < x < 2$

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$ Rpta: $x > 0$

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-x)^n}$ Rpta: $x \geq 1$, $x < -1$

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$ Rpta: $x > 2$, $x < -2$

93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$ Rpta: $\forall\ x \neq 0$

94. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{2^{n+1}}$ Rpta: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$

95. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(\ln(n))^2}$ Rpta: $-1 \leq x < 1$

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ Rpta: $x \geq -\frac{1}{2}$.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{3^n}$ Rpta: $-2 < x < 4$

98. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2n}}{(n+1)^2 5^n}$ Rpta: $\left[-\sqrt{5}-1, \sqrt{2}-1\right]$

99. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n . n^3}$ Rpta: $-1 \leq x \leq 3$

100. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3/2)^n}{n+1} x^n$ Rpta: $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

101. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$ Rpta: $-1 < x < 1$

102. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^2$ Rpta: $0 < x < 2$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n . n^2}$ Rpta: $-7 \leq x \leq -1$

104. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n(2n)!}$ Rpta: $-6 < x < 10$

105. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!(3/2)^n x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}$ Rpta: $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

106. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ Rpta: $-1 < x < 1$

107. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln(n).2^n x^n}{3^n.n^2}$ Rpta: $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

108. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}(x-1)^n$ Rpta: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$

109. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}x^{5(n+1)}}{2n+1}$ Rpta: $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \le x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

110. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n}+|x|^{3n}}{n^2}$ Rpta: $|x| \le 1$

111. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^{2n+1}$ Rpta: $[-1,1]$

112. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$ Rpta: $\langle -\infty, +\infty \rangle$

sug: $\left|\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

113. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n \operatorname{sen}(\frac{x}{3^n})$ Rpta: $-\infty < x < \infty$

sug: $\left|2^n \operatorname{sen}(\frac{x}{3^n})\right| \le \left|\frac{x\,2^n}{3^n}\right|$

114. Verificar que: $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $|x| < 1$

115. Demostrar que: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x)\ln(1-x)$

116. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4} \quad \text{si } |x| < 1$$

117. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2!} = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \text{si } |x| < 1$$

118. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln(a))^n}{n!}x^n \text{ , } a > 0 \text{ (sug.: } a^x = e^{x\ln a}\text{)}$$

119. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2-x} \quad \text{si } |x| < 2$$

120. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{(sug.: } \cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\text{)}$$

121. Comprobar la representación en serie de potencia de x:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{si } |x| < 1$$

122. Comprobar el desarrollo en serie de potencia de x:

$$\frac{3x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n \quad \text{si } |x|<½$$

$$\left(sug.: \frac{3x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$

123. Integrando término a término de 0 a x una representación en serie de potencia de t arctg(t). Demostrar: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-x\right]$

124. Escribir el desarrollo en serie de potencia de x:

a. $f(x)=xe^{-2x}$ Rpta: $f(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$

b. $f(x)=\cos 2x$ Rpta: $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$

c. $f(x)=\cos^2 x$ Rpta: $f(x)=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

d. $f(x)=\operatorname{sen}3x+x\cos 3x$ Rpta: $f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)\frac{3^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e. $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$ Rpta: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

f. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Rpta: $f(x)=x-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\ldots+\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots|x|<1$

125. Hallar la serie de potencia de x de $f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$

Rpta. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right)x^n$

126. Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

Rpta. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n)!}$

127. Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$

Rpta. $f(x)=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(3^{2n}-1)}{(2n+1)}x^{2n+1}$

128. Muestre que:

$$\operatorname{arcsen} x = x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2.4}{3.5}x^5+\frac{2.4.6}{3.5.7}x^7+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

129. Hallar la serie de potencia de x de la función: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x}$

Rpta. $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{13}{24}x^4-\dfrac{13}{24}x^5+.....$

130. Hallar la serie de potencia de x de las funciones

a. $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{2+x}$ **b.** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)(1+x^2)}$

131. Demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{1}{2}$

132. Analizar la convergencia ó divergencia de la serie: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2n+1}{n!}$ en caso de ser convergente calcular su suma. Rpta: 8e

133. Calcular la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)^2}$, sabiendo que: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}-1.$

134. Analizar la convergencia ó divergencia de las series siguientes y en caso de ser convergente calcular su suma.

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}$ Rpta: 27e

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{(n-1)!}$ Rpta: 20e

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5n+2}{(n-1)!}$ Rpta: -3e

d. $\sum_{n=1}^{\infty}n e^{-n}$ Rpta: $\frac{e}{(e-1)^2}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\, n!}$ Rpta:$e^{1/4}-1$

135. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\, n(n+1)}$ Rpta. 1

136. Analizar y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.4^n}$

Rpta. $\ln(\frac{4}{4-x})$

137. Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,(\sqrt[2n]{x}+1)}$ Rpta. $\frac{1}{1-x}$

138. La siguiente serie es convergente, calcular su suma

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-\frac{\pi^2}{16})^n$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

139. Si $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+5}{(n+2)!}$ Rpta. 13 - e

140. Hacer un análisis y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

141. Analizar y calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$

Rpta. $\dfrac{2}{(1-x)^3}$, para $|x| < 1$.

142. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)x^n}{n!}$ y concluir que $e = \dfrac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)}{n!}$

143. Demostrar que para todo entero positivo P, se tiene:

$(1-x)^{-p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$, $|x| < 1$, donde el símbolo $\binom{n+p}{p}$ es una abreviación de $\dfrac{(n+p)(n+p+1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots p}$ deducir la formula: $3^{P+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

144. Hallar la suma de la serie de la función $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{(2cox)^n}$ para $0 < x < \pi/3$

Rpta: $-\operatorname{sen}^2 x$

145. Estudiar la serie si converge hallar su suma $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^3 \left(\dfrac{1}{e^{2n-4}}\right)$

146. Estudiar la serie si es convergente, hallar su suma

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+3)6^n}$ Rpta.: $\dfrac{1}{2}[210\ln\dfrac{5}{6} + \dfrac{95}{72}]$

147. Estudiar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)8^n}$ y en caso de convergencia, calcular la suma.

Rpta. $\dfrac{8}{9} - 8\ln\dfrac{9}{8}$

148. Calcular la suma de la serie, analizando en que intervalo converge $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, y aplicar para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)4^n}$

149. La siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+3)!}$ es convergente, calcular su suma.

Rpta. $\frac{4e-27}{2}$

150. Estudiar la convergencia ó divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)8^n}$, en caso de ser convergente calcular su suma.

151. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$ y calcular la suma de la serie. Aplicar a $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{4})^{n-1}$

152. Si $a \in R$, $b > 1$, Demostrar que:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na}{b^n}=\frac{ab}{(b-1)^2}$ aplicar el resultado para sumar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{5^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}+\pi n}{3^{n-2}}$

153. Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n})x^n$ para a,b > 0 arbitrarios.

154. Demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}-\frac{x^{2n-2}}{1+x^{2n-2}}\right)=\begin{cases}-1, & |x|<1\\ -\frac{1}{2}, & x=\pm 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

155. Hallar el intervalo de convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{5^{n+1}})^{n^2}x^{17n}$

156. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leq\frac{3(26+19\sqrt{2})}{34-24\sqrt{2}}$

157. Pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n(\pi/6)}{(n+3)!}=\frac{1}{162\sqrt{3}}[54e^{1/\sqrt{3}}-63-19\sqrt{3}]$

158. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\leq\frac{\pi^2}{12}$

159. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$

160. Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}}\frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1+x^2+x^4}$

161. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

162. Usando serie de potencias, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}=1$

163. Calcular la suma de la serie

$$\operatorname{arctg}(\frac{x}{1})+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+1.2.x^2})+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+1.2.3.x^2})+...+\operatorname{arctg}(\frac{x}{1+n(n-1)x^2})+...$$

Rpta.: $\frac{\pi}{2}$

164. Analizar la serie si es convergente calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\operatorname{sen}x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{2^3}+...$$

Rpta.: $\frac{2\operatorname{sen}x}{5-4\cos x}$

165. **Dadas las series infinitas:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{2^3}\cos 3x + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2^3}\operatorname{sen} 3x + \ldots$$

Se pide a. **Demostrar la convergencia**

b. **Calcular la suma de cada serie**

166. Dada la serie infinita.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + k\cos\alpha + k^2\cos 2\alpha + \ldots + k^n\cos n\alpha + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = k\operatorname{sen}\alpha + k^2\operatorname{sen} 2\alpha + \ldots + k^n\operatorname{sen} n\alpha + \ldots$$

Siendo 0 < k < 1, Calcular la suma de cada serie

Rpta.: $\dfrac{1-k\cos\alpha}{1+k^2-2k\cos\alpha}$; $\dfrac{k\operatorname{sen}\alpha}{1+k^2-2k\cos\alpha}$

APENDICES

SUMATORIAS.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

FORMULAS IMPORTANTES.

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4. $$\sum_{i=}^{n} i^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, k constante.

2. $$\sum_{i=1}^{n} \left[f(i) \pm g(i) \right] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

3. $\sum_{i=1}^{n}[f(i)-f(i-1)] = f(n)-f(0)$ **(1ra. Regla telescópica)**

4. $\sum_{i=k}^{n}[f(i)-f(i-1)] = f(n)-f(k-1)$

(1ra. Regla telescópica generalizada)

5. $\sum_{i=1}^{n}[f(i+1)-f(i-1)] = f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)$

(2da. regla telescópica)

6. $\sum_{i=k}^{n}[f(i+1)-f(i-1)] = f(n+1)+f(n)-f(k)-f(k-1)$

(2da. regla telescópica generalizada)

PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL.

1. $e^{x}.e^{y} = e^{x+y}$

2. $e^{x} / e^{y} = e^{x-y}$

3. $(e^{x})^{y} = e^{xy}$

PROPIEDADES DEL LOGARITMO NATURAL: Ln A.

1. Ln AB = Ln A + Ln B

2. Ln A/B = Ln A - Ln B

3. $\mathrm{Ln}A^{r} = r\mathrm{LnA}$

4. $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}A$

PROPIEDADES DEL FACTORIAL.

$$n! = 1.2.3\ldots n$$

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

EL NUMERO e.

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = 2.7182818284590452\ldots$$

NUMERO COMBINATORIO.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Cálculus Vól. 2 por: TOM. M. APOSTOL.

2. Introducción a las Series por: ROBERT - SEELEY.

3. Análisis Matemático Vól. 2 por: HASSER LA SALLE SULLIVAN.

4. Problemas de Cálculo Infinitesimal y Teoría de Funciones por: MOYA - MORENO.

5. Cálculus por: EINAR HILLE.

6. Matemática Superior para Ingeniería por: C.R. WYLLE.

7. Sucesiones y Series Vól. 1 y Vól. 2 por: YU TAKEUCHI.

8. Problemas de Cálculo Infinitesimal por: A. GIL CRIADO.

9. Cálculo Por: FRALEICHI.

10. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático Por: G.N. BERMAN.

11. Análisis Matemático Por: PROTTER - MORREY.

12. Ejercicios y Problemas de Matemática Superior Vól. 2 Por: DANKO Y A. POPOV.

13. Análisis de una Variable Real por: MARTINEZ SANZ.

14. Principios de Análisis Matemátco Por: E. LINÉS.

OBRAS DEL AUTOR

- Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones
- Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Análisis Matemático III para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Transformada de Laplace
- Sucesiones y Series Infinitas
- Geometría Analítica
- Funciones Vectoriales de Variable Real
- Funciones de Varias Variables
- Integrales Curvilíneas y Múltiples
- Vectores y sus aplicaciones
- Rectas - Planos y Superficies
- Matrices y Determinantes
- Números Complejos y Polinomios
- Solucionario de Makarenko (Ecuaciones Diferenciales)
- Solucionario de Leithold 2da. Parte
- Solucionario de Análisis Matemático III de G. Berman
- Solucionario de Análisis Matemático I por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático II por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático III por Deminovich
- Solucionario de Matemática para Administración y Economía por Weber